VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên)
PHẠM KHẮC BAN - TẠ MÂN

BÀI TẬP HÌNH HỌC 11

NÂNG CAO

(Tái bản lần thứ chín)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

01 - 2016/CXBIPH/806 - 964/GD

Mã số : NB104n6

Lời nói đầu

Đây là cuốn sách bài tập dùng cho học sinh học theo chương trình Toán nâng cao lớp 11.

Các bài tập trong sách được sắp xếp theo các chương, mục của sách giáo khoa (SGK) Hình học 11 nâng cao.

Phần lớn các bài tập trong sách nhằm củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh theo mục tiêu của chương trình và SGK Hình học 11 nâng cao ; những bài tập này tương tự như các bài tập trong SGK. Vì vậy, học sinh làm được các bài tập đó sẽ có định hướng để giải các bài tập trong SGK. Ngoài ra, còn có một số bài tập dành cho học sinh khá, giỏi.

Cuối mỗi chương có các bài tập trắc nghiệm. Mỗi bài có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Nhiệm vụ của học sinh là tìm ra phương án đúng đó.

Các tác giả chân thành cảm ơn nhóm biên tập của ban Toán - Tin, Công ty Cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã giúp đỡ rất nhiều để hoàn thiện cuốn sách này.

Các tác giả

Chương I — PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

A - KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1, §2. Mở đầu về phép biến hình. Phép tịnh tiến và phép dời hình

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép biến hình là một quy tắc để với mỗi điểm M trên mặt phẳng có thể xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng.

2. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

3. Tính chất cơ bản của phép tịnh tiến : Phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

4. Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì. Phép tịnh tiến là một phép dời hình.

5. Phép dời hình có các tính chất : Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tia thành tia, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

6. Cho hai phép dời hình F và G, giả sử M là điểm bất kì, phép biến hình F biến điểm M thành điểm M' và phép biến hình G biến điểm M' thành điểm M". Khi đó phép biến hình biến điểm M thành điểm M" được gọi là hợp thành của phép F và phép G.

II - ĐỀ BÀI

1. Chứng minh rằng phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó.

2. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó a cắt b, $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$. Tìm phép tịnh tiến biến a thành a' và biến b thành b'.

3. Cho đường tròn (O) với đường kính AB cố định, một đường kính MN thay đổi. Các đường thẳng AM và AN cắt tiếp tuyến tại B lần lượt tại P và Q. Tìm quỹ tích trực tâm các tam giác MPQ và NPQ.

4. Cho hai đường tròn không đồng tâm $(O\,;R)$ và $(O_1\,;R_1)$ và một điểm A trên $(O\,;R)$. Xác định điểm M trên $(O\,;R)$ và điểm N trên $(O_1\,;R_1)$ sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OA}$.

5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O\,;R)$, trong đó $AD = R$. Dựng các hình bình hành $DABM$ và $DACN$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DNM nằm trên $(O\,;R)$.

6. Cho hai phép tịnh tiến T và T' theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Với điều kiện nào của $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thì hợp thành của T và T' là phép đồng nhất.

7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}(1\,;-2)$.

a) Viết phương trình ảnh của mỗi đường thẳng sau đây qua phép tịnh tiến T.

i) Đường thẳng a có phương trình $3x - 5y + 1 = 0$;

ii) Đường thẳng b có phương trình $2x + y + 100 = 0$.

b) Viết phương trình ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + y - 1 = 0$ qua phép tịnh tiến T.

8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường thẳng d và d' lần lượt có phương trình $Ax + By + C = 0$ và $Ax + By + C' = 0$. Tìm những vectơ $\vec{u}(a\,;b)$ sao cho phép tịnh tiến T theo vectơ đó biến d thành d'.

9. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C. Chứng tỏ rằng phép dời hình biến mỗi điểm A, B, C thành chính nó phải là phép đồng nhất.

10. Chứng tỏ rằng hợp thành của hai hay nhiều phép dời hình là một phép dời hình.

11. Chứng minh rằng phép dời hình biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song mà khoảng cách giữa hai đường thẳng song song đã cho bằng khoảng cách giữa các ảnh của chúng.

12. Cho hai tam giác bằng nhau ABC và $A'B'C'$ ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$). Chứng minh rằng có không quá một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$.

13. Giả sử phép dời hình F biến điểm I đã cho thành chính nó và biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' không trùng với M.

a) Tìm những đường tròn biến thành chính nó qua phép dời hình F.

b) Chứng tỏ rằng nếu đường thẳng a không đi qua I thì F biến a thành đường thẳng a' không trùng với a.

14. Cho đường thẳng a và một điểm I nằm trên nó. Gọi F là phép dời hình biến a thành a và I là điểm duy nhất biến thành chính nó. Chứng minh rằng F biến điểm M bất kì thành điểm M' sao cho I là trung điểm MM'.

15. Chứng minh rằng nếu phép dời hình F biến mỗi đường thẳng a thành đường thẳng a' vuông góc với a thì có một điểm duy nhất biến thành chính nó qua phép F.

16. Có hay không một phép dời hình F sao cho mọi đường thẳng đều biến thành đường thẳng song song với nó ?

17. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x\,;\,y)$ thành điểm $M'(x'\,;\,y')$ sao cho

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

trong đó $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1\,;\, ab + cd = 0$.

Chứng tỏ rằng F là phép dời hình.

§3. Phép đối xứng trục

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép đối xứng qua đường thẳng a là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng a.

Phép đối xứng qua đường thẳng a còn gọi là phép đối xứng trục. Đường thẳng a gọi là trục của phép đối xứng.

2. Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

3. Trục đối xứng của hình $\mathscr{H}$ là đường thẳng mà phép đối xứng qua đường thẳng đó biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}$.

18. Cho hai điểm phân biệt A, B và phép dời hình F khác với phép đồng nhất sao cho $F(A) = A$, $F(B) = B$. Chứng minh rằng :

a) Nếu điểm M nằm trên đường thẳng AB thì $F(M) = M$;

b) F là phép đối xứng qua đường thẳng AB.

19. Cho hai điểm A, B phân biệt. Có những phép dời hình nào biến A thành A và biến B thành B.

20. Chứng minh rằng :

a) Hợp thành của hai phép đối xứng trục có các trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.

b) Mỗi phép tịnh tiến đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục đối xứng song song bằng nhiều cách.

c) Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng trục có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.

d) Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép đối xứng trục.

e) Cho phép đối xứng trục $Đ_a$ qua đường thẳng a và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$ vuông góc với a. Chứng tỏ rằng hợp thành của $Đ_a$ và T là phép đối xứng trục, hợp thành của T và $Đ_a$ cũng là phép đối xứng trục.

21. Cho hai đoạn thẳng bằng nhau $AB = A'B'$. Chứng minh rằng có thể tìm được một phép đối xứng trục hoặc hợp thành của hai phép đối xứng trục để biến A thành A', biến B thành B'.

22. Cho hai tam giác bằng nhau ABC và $A'B'C'$ ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$). Chứng minh rằng chỉ cần tối đa ba phép đối xứng trục để hợp thành của chúng biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$.

23. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng d và đường tròn $(\mathscr{C})$ lần lượt có phương trình :

$$d : Ax + By + C = 0 ;$$

$$(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

a) Viết phương trình ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục có trục đối xứng là Ox.

b) Viết phương trình ảnh của đường tròn $(\mathscr{C})$ qua phép đối xứng trục có trục đối xứng là Oy.

c) Viết phương trình ảnh của đường tròn $(\mathscr{C})$ qua phép đối xứng trục có trục là đường thẳng $bx - ay = 0$.

24. Gọi m là đường phân giác ngoài tại A của tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M trên m, chu vi của tam giác MBC không nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

25. Cho elip (E) với hai tiêu điểm F_1 và F_2. Gọi M là một điểm nằm trên (E) nhưng không nằm trên đường thẳng F_1F_2 và m là phân giác ngoài tại đỉnh M của tam giác MF_1F_2. Chứng minh rằng m chỉ cắt (E) tại điểm M duy nhất (đường thẳng m như thế được gọi là *tiếp tuyến* của (E) tại điểm M).

26. Cho hypebol (H) với hai tiêu điểm F_1 và F_2. Gọi M là một điểm nằm trên (H) nhưng không nằm trên đường thẳng F_1F_2 và m là phân giác trong tại đỉnh M của tam giác MF_1F_2. Chứng minh rằng m chỉ cắt (H) tại điểm M duy nhất. (Đường thẳng m như thế được gọi là *tiếp tuyến* của (H) tại điểm M).

27. Cho parabol (P) có tiêu điểm F và đường chuẩn d. Với điểm M trên (P) ta kẻ $MH \perp d$ $(H \in d)$ và gọi m là phân giác của góc FMH. Chứng minh rằng m chỉ cắt (P) tại điểm chung duy nhất M. (Đường thẳng m như thế được gọi là *tiếp tuyến* của (P) tại điểm M).

28. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp và P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' là các điểm đối xứng với điểm P lần lượt qua các đường thẳng AI, BI, CI. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

29. Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là tâm của các đường tròn bàng tiếp trong góc A, góc B và góc C. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A' vuông góc với BC, qua B' vuông góc với AC, qua C' vuông góc với AB đồng quy.

§4. Phép quay và phép đối xứng tâm

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Trong mặt phẳng, cho điểm O và góc lượng giác φ. Phép quay $Q_{(O,\varphi)}$ tâm O góc quay φ là phép biến hình biến điểm O thành chính nó và biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM = OM'$ và $(OM, OM') = \varphi$.

2. Phép quay là một phép dời hình.

3. Khi $\varphi = \pi$ thì phép quay $Q_{(O,\pi)}$ gọi là phép đối xứng qua điểm O, và kí hiệu là $Đ_O$. Phép đối xứng qua điểm O còn gọi là phép đối xứng tâm.

4. Phép đối xứng qua điểm O biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

II - ĐỀ BÀI

30. Cho hai điểm A, B phân biệt. Chứng minh rằng nếu phép dời hình F biến A thành B và biến B thành A thì F là phép đối xứng trục hoặc phép đối xứng tâm.

31. Chứng minh rằng hợp thành của một số phép quay với các tâm quay trùng nhau là một phép quay.

32. Chứng minh rằng :

a) Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là một phép quay.

b) Mỗi phép quay đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau, bằng nhiều cách.

c) Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng trục có các trục đối xứng đồng quy là một phép quay.

d) Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng trục có các trục đối xứng đồng quy là một phép đối xứng trục.

33. Cho đường tròn (O) và một điểm I không nằm trên đường tròn. Với mỗi điểm A thay đổi trên đường tròn, ta xét hình vuông $ABCD$ có tâm là I. Tìm quỹ tích các điểm B, C, D.

34. Cho đường thẳng a và một điểm G không nằm trên a. Với mỗi điểm A nằm trên a ta dựng tam giác đều ABC có tâm là G. Tìm quỹ tích hai điểm B và C khi A chạy trên a.

35. Cho đường tròn (O) và tam giác ABC. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua A, M_2 là điểm đối xứng của M_1 qua B, M_3 là điểm đối xứng của M_2 qua C. Tìm quỹ tích của điểm M_3.

36. Cho hai đường thẳng a, b phân biệt và điểm C không nằm trên chúng. Hãy xác định hai điểm A, B lần lượt nằm trên a và b sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

37. Cho hình vuông $ABCD$ và một điểm M nằm trên một cạnh của hình vuông. Tìm các điểm N, P nằm trên cạnh của hình vuông sao cho tam giác MNP là tam giác đều.

38. Cho tam giác đều ABC với $(AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^\circ$. Hãy kể ra các phép dời hình biến tam giác ABC thành chính nó.

39. Cho tam giác đều ABC với $(AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^\circ$. Gọi Q_A, Q_B là các phép quay góc 60° lần lượt có tâm là A và B. Gọi F là hợp thành của Q_B và Q_A.

a) Phép F biến các điểm A, B, C thành các điểm nào ?

b) Phép F là phép gì ?

c) Phép hợp thành của Q_A và Q_B là phép gì ?

40. Cho tam giác đều ABC với $(AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^\circ$. Gọi $Đ_{AB}$, $Đ_{BC}$ và $Đ_{AC}$ là các phép đối xứng lần lượt qua các đường thẳng AB, BC, AC.

a) Hợp thành của $Đ_{BC}$ và $Đ_{AB}$ là phép gì ?

b) Hợp thành của $Đ_{AB}$ và $Đ_{AC}$ là phép gì ?

c) Gọi Q_A và Q_B là các phép quay góc 120° với tâm lần lượt tại A và B. Hợp thành của Q_B và Q_A là phép gì ?

41. Hãy chỉ ra tất cả các phép dời hình biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó.

42. Cho hai phép quay Q_A và Q_B có tâm quay là A và B (phân biệt) và có cùng góc quay 90°. Gọi F là hợp thành của Q_A và Q_B, F' là hợp thành của Q_B và Q_A. Hãy chứng tỏ rằng F và F' là những phép đối xứng tâm và nêu rõ cách xác định tâm đối xứng của các phép đó.

43. Về phía ngoài của tam giác ABC vẽ các hình vuông $BCMN$ và $ACPQ$ có tâm O và O'.

a) Chứng minh rằng khi cố định hai điểm A, B và cho điểm C thay đổi thì đường thẳng NQ luôn luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi I là trung điểm AB. Chứng minh rằng IOO' là tam giác vuông cân.

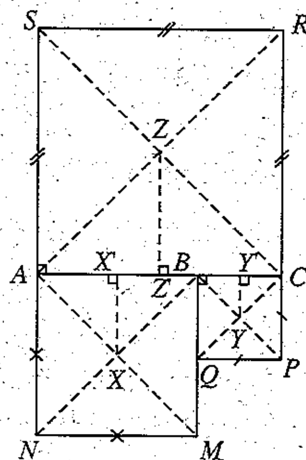
44. Về phía ngoài của hình bình hành $ABCD$ dựng các hình vuông có cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng bốn tâm của bốn hình vuông đó là đỉnh của một hình vuông.

45. Về phía ngoài của tứ giác lồi $ABCD$ dựng các hình vuông có cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tâm của bốn hình vuông đó làm thành một tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.

46. Trên hình 1 có ba điểm thẳng hàng A, B, C và ba hình vuông $ABMN$, $BCPQ$, $ACRS$ với tâm lần lượt là X, Y, Z. Gọi X', Y', Z' lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, AC.

a) Chứng minh rằng các tam giác $Z'XY$, $X'YZ$, $Y'XZ$ là những tam giác vuông cân.

b) Chứng minh rằng hai đoạn thẳng AY, XZ bằng nhau và vuông góc với nhau, cũng như thế đối với hai đoạn thẳng BZ, XY và CX, YZ.



Hình 1

§5. Hai hình bằng nhau

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nếu ABC và A'B'C' là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia.

2. Hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

II - ĐỀ BÀI

47. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ với đường cao lần lượt là AH và $A'H'$. Trong mỗi trường hợp dưới đây, hai tam giác đó có bằng nhau hay không ?

a) $AH = A'H'$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$;

b) $AH = A'H'$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, các góc A và A' đều là góc tù.

48. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, hình thang $A'B'C'D'$ vuông tại A' và D'. Chứng minh rằng hai hình thang ấy bằng nhau nếu $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ và $CD = C'D'$.

49. Chứng minh rằng hai tam giác bằng nhau nếu có các đường tròn nội tiếp bằng nhau, một cặp đường tròn bàng tiếp bằng nhau, đồng thời khoảng cách giữa tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của hai tam giác đó cũng bằng nhau.

50. Chứng minh rằng hai tam giác vuông bằng nhau nếu có các cạnh huyền bằng nhau và đường cao ứng với cạnh huyền bằng nhau.

51. Chứng minh rằng nếu ba trung tuyến của tam giác ABC lần lượt bằng ba trung tuyến của tam giác $A'B'C'$ thì hai tam giác đó bằng nhau.

52. Cho hình $\mathscr{H}$ gồm ba đường tròn có tâm tại A, B, C đôi một tiếp xúc ngoài với nhau và hình $\mathscr{H}'$ gồm ba đường tròn có tâm tại A', B', C' đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC bằng tam giác $A'B'C'$ thì hình $\mathscr{H}$ bằng hình $\mathscr{H}'$.

§6, §7. Phép vị tự. Phép đồng dạng

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép vị tự $V_{(O,k)}$ với tâm O và tỉ số k ($k \neq 0$) là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

2. Phép vị tự tỉ số k biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$, biến góc thành góc bằng nó.

3. Phép vị tự biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

4. Tâm vị tự của hai đường tròn : đó là tâm của phép vị tự V biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm vị tự đó gọi là tâm vị tự ngoài hay tâm vị tự trong tuỳ theo tỉ số của phép vị tự V là dương hay âm.

Hai đường tròn có bán kính khác nhau thì có một tâm vị tự ngoài và một tâm vị tự trong. Hai đường tròn có bán kính bằng nhau (tâm khác nhau) thì chỉ có tâm vị tự trong, đó chính là trung điểm đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn.

5. Phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) là phép biến hình biến hai điểm tuỳ ý M, N thành hai điểm M', N' sao cho $M'N' = kMN$.

6. Mọi phép đồng dạng F tỉ số k là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

7. Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

53. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ không bằng nhau nhưng có các cạnh tương ứng song song : $AB \,//\, A'B'$, $BC \,//\, B'C'$ và $CA \,//\, C'A'$. Chứng minh rằng có phép vị tự biến tam giác này thành tam giác kia.

54. Cho hai phép vị tự V_1 có tâm O_1 tỉ số k_1 và V_2 có tâm O_2 tỉ số k_2. Gọi F là hợp thành của V_1 và V_2. Chứng minh rằng :

a) F là một phép tịnh tiến nếu $k_1k_2 = 1$. Hãy xác định vectơ tịnh tiến.

b) F là một phép vị tự nếu $k_1k_2 \neq 1$. Hãy xác định tâm và tỉ số của phép vị tự đó.

55. Cho ba đường tròn $(I_1 ; R_1)$, $(I_2 ; R_2)$, $(I_3 ; R_3)$ không đồng tâm và không bằng nhau. Gọi O_3^+ và O_3^- lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn $(I_1 ; R_1)$ và $(I_2 ; R_2)$; O_1^+ và O_1^- lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn $(I_2 ; R_2)$ và $(I_3 ; R_3)$; O_2^+ và O_2^- lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn $(I_3 ; R_3)$ và $(I_1 ; R_1)$. Chứng minh rằng mỗi bộ ba điểm sau đây thẳng hàng :

$$O_1^+, O_2^+, O_3^+ \; ; \; O_1^+, O_2^-, O_3^- \; ; \; O_1^-, O_2^+, O_3^- \text{ và } O_1^-, O_2^-, O_3^+.$$

56. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) ngoài nhau và không bằng nhau. Một đường tròn (O) thay đổi tiếp xúc ngoài với (O_1) và (O_2). Gọi các tiếp điểm tương ứng là A và B. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định. Nếu thay giả thiết "tiếp xúc ngoài" bằng "tiếp xúc trong" thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào ?

57. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng thay đổi đi qua A cắt (O) ở A và M, cắt (O') tại A và M'. Gọi P và P' lần lượt là trung điểm của AM và AM'.

a) Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng PP'.

b) Tìm quỹ tích trung điểm J của đoạn thẳng MM'.

58. Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) đôi một tiếp xúc ngoài với nhau, A là tiếp điểm của (O_1) và (O_2) ; B là tiếp điểm của (O_2) và (O_3) ; C là tiếp điểm của (O_3) và (O_1). Đường thẳng AB cắt (O_3) tại điểm thứ hai B', đường thẳng AC cắt (O_3) tại điểm thứ hai C'. Chứng minh $B'C'$ là đường kính của (O_3).

59. Chứng minh rằng nếu hai tam giác có các cạnh tương ứng tỉ lệ thì có phép đồng dạng biến tam giác này thành tam giác kia.

60. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AD. Gọi V là phép vị tự tâm D tỉ số $k = \frac{DA}{DB}$ và Q là phép quay tâm D góc quay $\varphi = (DB, DA)$, F là hợp thành của V và Q.

a) Phép F biến tam giác ABD thành tam giác nào ?

b) Lấy hai điểm M và N lần lượt nằm trên hai cạnh BA và AC sao cho

$$\frac{BM}{MA} = \frac{AN}{NC}.$$

Chứng minh rằng DMN là tam giác vuông.

61. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AD. Gọi c là phân giác của góc C, $Đ_c$ là phép đối xứng qua c, V là phép vị tự tâm C tỉ số $k = \frac{CA}{CB}$ và F là hợp thành của $Đ_c$ và V.

a) F biến tam giác ABC thành tam giác nào ?

b) Lấy hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai đoạn thẳng AB và DA sao cho

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NA}.$$

Chứng minh rằng c là phân giác của góc MCN.

62. Dựng tam giác ABC biết góc A bằng α, tỉ số $\frac{AB}{AC} = k$ và chu vi tam giác bằng m.

63. Chứng minh rằng nếu hai tam giác có các đường cao tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

 Bài tập ôn tập chương I

64. Cho hai điểm A và A' đối xứng với nhau qua điểm I, F là phép dời hình biến I thành I, biến A thành A'. Chứng minh rằng F là phép đối xứng tâm hoặc phép đối xứng trục.

65. Cho phép dời hình F không phải là phép đồng nhất. Chứng minh rằng nếu F biến điểm I nào đó thành chính nó thì F là phép quay tâm I hoặc là phép đối xứng có trục là đường thẳng đi qua I.

66. Cho đường tròn (O) và phép dời hình F biến (O) thành chính nó nhưng F không phải là phép đồng nhất. Gọi M là điểm thay đổi trên đường tròn và $M' = F(M)$. Chứng minh rằng quỹ tích của trung điểm đoạn thẳng MM' là một đường tròn, hoặc là một đoạn thẳng, hoặc là một điểm.

67. Cho *Đ* là phép đối xứng trục có trục đối xứng là đường thẳng d và T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ song song với d. Hợp thành của *Đ* và T gọi là *phép đối xứng trượt*. Đường thẳng d gọi là *trục* của phép đối xứng trượt, vectơ $\vec{v}$ gọi là *vectơ trượt*. Phép đối xứng trục là một trường hợp đặc biệt của phép đối xứng trượt khi vectơ trượt là vectơ–không.

a) Chứng minh rằng hợp thành của T và *Đ* cũng bằng hợp thành của *Đ* và T.

b) Chứng minh rằng nếu M' là ảnh của M qua phép đối xứng trượt thì trung điểm đoạn thẳng MM' luôn nằm trên trục của phép đối xứng trượt đó.

c) Hợp thành của hai phép đối xứng trượt có trục song song là phép gì ?

d) Chứng minh rằng hợp thành của một phép đối xứng trục và một phép tịnh tiến là một phép đối xứng trượt.

e) Chứng minh rằng hợp thành của một phép quay và một phép đối xứng trục là một phép đối xứng trượt.

g) Chứng minh rằng hợp thành của ba phép đối xứng trục là một phép đối xứng trượt.

68. Cho hai đoạn thẳng bằng nhau AB và $A'B'$ ($AB = A'B'$). Chứng minh rằng có một phép đối xứng trượt biến A thành A', biến B thành B'.

69. Cho hai đường thẳng phân biệt a, a' và phép dời hình F biến a thành a'. Một điểm M thay đổi trên a và $M' = F(M)$. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng MM' hoặc trùng nhau, hoặc nằm trên một đường thẳng.

70. Cho hai đường tròn có bán kính bằng nhau (O) và (O'). Trên (O) lấy hai bán kính vuông góc OA, OB và trên (O') lấy hai bán kính vuông góc $O'A'$, $O'B'$ sao cho A, A' nằm trên đường thẳng OO' và hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{O'A'}$ cùng hướng, còn hai vectơ $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{O'B'}$ ngược hướng.

a) Chứng minh rằng có phép dời hình F biến đường tròn (O) thành (O') sao cho hai điểm A, B lần lượt biến thành hai điểm A', B'.

b) Với mỗi điểm M nằm trên (O) và ảnh M' của nó qua phép dời hình F, chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng MM' nằm trên một đường thẳng cố định.

71. Cho phép vị tự V tâm O, tỉ số $k \neq 1$ và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$. Gọi F là phép hợp thành của V và T.

a) Tìm điểm I sao cho F biến I thành chính nó.

b) Chứng minh rằng F là phép vị tự tâm I tỉ số k.

72. Cho đường tròn (O) với dây cung PQ. Dựng hình vuông $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên đường thẳng PQ và hai đỉnh C, D nằm trên đường tròn.

73. Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn đó. Một đường thẳng thay đổi đi qua P, cắt (O) tại hai điểm A và B. Tìm quỹ tích điểm M sao cho $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$.

74. Cho điểm A cố định nằm trên đường tròn (O) và điểm C thay đổi trên đường tròn đó. Dựng hình vuông $ABCD$. Tìm quỹ tích điểm B và điểm D.

Bài tập trắc nghiệm chương I

1. Cho đường thẳng a cắt hai đường thẳng song song b và b'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành chính nó và biến đường thẳng b thành đường thẳng b' ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;
(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

2. Cho hình bình hành $ABCD$. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng AB thành đường thẳng CD và biến đường thẳng AD thành đường thẳng BC ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;
(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

3. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đồ thị của hàm số $y = \sin x$ thành chính nó ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;
(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

4. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau và góc giữa chúng bằng 60°. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến a thành a và biến b thành b ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;
(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

5. Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau a và b. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến a thành a và biến b thành b ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;
(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

6. Đồ thị của hàm số $y = \cos x$ có bao nhiêu trục đối xứng ?

(A) Không có trục đối xứng ; (B) Có một trục đối xứng duy nhất ;
(C) Chỉ có hai trục đối xứng ; (D) Có vô số trục đối xứng.

7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Tam giác có trục đối xứng ; (B) Tứ giác có trục đối xứng ;

(C) Hình thang có trục đối xứng ; (D) Hình thang cân có trục đối xứng.

8. Trong các hình dưới đây hình nào có ba trục đối xứng ?

(A) Đoạn thẳng ; (B) Đường tròn ;

(C) Tam giác đều ; (D) Hình vuông.

9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Tam giác đều có tâm đối xứng ; (B) Tứ giác có tâm đối xứng ;

(C) Hình thang cân có tâm đối xứng ; (D) Hình bình hành có tâm đối xứng.

10. Cho hai đường thẳng bất kì d và d'. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;

(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

11. Cho tam giác đều ABC với O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Với giá trị nào dưới đây của φ thì phép quay $Q_{(O,\varphi)}$ biến tam giác đều ABC thành chính nó ?

(A) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; (B) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$;

(C) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$; (D) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

12. Trong các phép sau đây, phép nào có tính chất : *Biến mỗi đường thẳng a thành đường thẳng a' không song song với a* ?

(A) Phép tịnh tiến ; (B) Phép đối xứng trục ;

(C) Phép đối xứng tâm ; (D) Phép quay với góc quay $\frac{\pi}{2}$.

13. Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục song song là phép nào trong các phép sau đây ?

(A) Phép đối xứng trục ; (B) Phép đối xứng tâm ;

(C) Phép quay ; (D) Phép tịnh tiến.

14. Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là phép nào trong các phép sau đây ?

(A) Phép đối xứng trục ; (B) Phép quay ;

(C) Phép tịnh tiến ; (D) Phép đồng nhất.

15. Hợp thành của hai phép đối xứng tâm là phép nào trong các phép sau đây ?

(A) Phép đối xứng trục ; (B) Phép đối xứng tâm ;

(C) Phép quay ; (D) Phép tịnh tiến.

16. Hợp thành của một phép tịnh tiến và phép đối xứng tâm là phép nào trong các phép sau đây ?

(A) Phép đối xứng trục ; (B) Phép đối xứng tâm ;

(C) Phép đồng nhất ; (D) Phép tịnh tiến.

17. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số $k = 20$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;

(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

18. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự biến d thành d' ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;

(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

19. Cho hai đường thẳng song song d và d' và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;

(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

20. Cho hai đường tròn bằng nhau $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R)$ với tâm O và O' phân biệt. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O\ ;\ R)$ thành $(O'\ ;\ R)$?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;

(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

21. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$. Có bao nhiêu phép vị tự với tâm O biến $(O\ ;\ R)$ thành chính nó ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;

(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

22. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O\ ;\ R)$ thành chính nó ?

(A) Không có phép nào ; (B) Có một phép duy nhất ;

(C) Chỉ có hai phép ; (D) Có vô số phép.

23. Cho hai phép vị tự $V_{(O,k)}$ và $V_{(O',k')}$ với O và O' là hai điểm phân biệt và $kk' = 1$. Hợp thành của hai phép vị tự đó là phép nào trong các phép sau đây ?

(A) Phép tịnh tiến ; (B) Phép đối xứng trục ;

(C) Phép đối xứng tâm ; (D) Phép quay.

B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1, §2. Mở đầu về phép biến hình. Phép tịnh tiến và phép dời hình

1. Giả sử phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Lấy hai điểm phân biệt M, N trên d và gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ thì M', N' nằm trên d'. Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. Vậy hai đường thẳng d và d' có cùng vectơ chỉ phương nên $d \parallel d'$ hoặc d trùng với d'.

d trùng với d' khi $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$, tức là khi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d hoặc $\vec{u} = \vec{o}$; $d \parallel d'$ khi $\vec{u}$ không phải là vectơ chỉ phương của d.

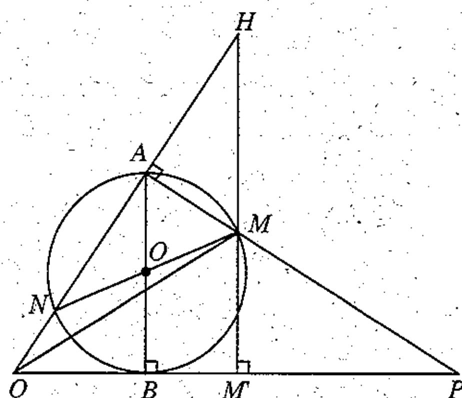
2. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$, trong đó O là giao điểm của a và b ; O' là giao điểm của a' và b'.

3. (h.2)

Tam giác MPQ có QA là một đường cao (vì $QA \perp MP$). Bởi vậy nếu ta kẻ $MM' \perp PQ$ thì MM' cắt QA tại trực tâm H của tam giác MPQ, đoạn thẳng OA là đường trung bình của tam giác NMH nên

$$\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$

Vậy phép tịnh tiến T theo vectơ $\overrightarrow{BA}$ biến M thành H. Chú ý rằng M không trùng với A hoặc B, ta suy ra quỹ tích H là ảnh của đường tròn (O) (không kể hai điểm A và B) qua phép tịnh tiến đó.

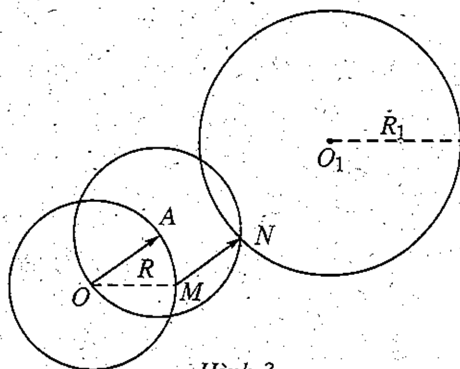


Hình 2

Làm tương tự đối với trực tâm H' của tam giác NPQ.

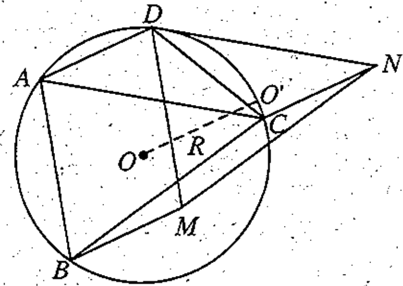
4. (h.3)

Giả sử đã xác định được M và N theo yêu cầu của bài toán. Khi đó, phép tịnh tiến T theo vectơ $\overrightarrow{OA}$ sẽ biến điểm M thành điểm N và biến đường tròn $(O ; R)$ thành đường tròn $(A ; R)$. Vì $(O ; R)$ đi qua M, nên $(A ; R)$ đi qua N. Do đó N là giao điểm của hai đường tròn $(A ; R)$ và $(O_1 ; R_1)$. Từ đó, dễ dàng suy ra cách dựng.



Hình 3

Số nghiệm hình phụ thuộc vào số giao điểm của hai đường tròn $(A ; R)$ và $(O_1 ; R_1)$.



Hình 4

5. (h.4)

Theo giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CN}.$$

Vì vậy, phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$ biến tam giác ABC thành tam giác DMN. Suy ra, nếu O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN thì phép tịnh tiến đó biến O thành O', tức là

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AD}.$$

Do đó

$$OO' = AD = R$$

và vì vậy O' nằm trên $(O ; R)$.

6. Với điểm M bất kì, giả sử $T(M) = M_1$ và $T'(M_1) = M'$. Khi đó $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$, suy ra $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v}$. Hợp thành của T và T' biến M thành M' nên hợp thành đó là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$.

Phép hợp thành đó là phép đồng nhất khi và chỉ khi

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}.$$

7. Biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến T là $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

suy ra $x = x' - 1$, $y = y' + 2$.

a) i) Nếu $M(x ; y)$ nằm trên đường thẳng a thì $3x - 5y + 1 = 0$ hay $3(x' - 1) - 5(y' + 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x' - 5y' - 12 = 0$. Điều đó chứng tỏ điểm $M'(x'; y')$ thoả mãn phương trình $3x - 5y - 12 = 0$. Đó là phương trình ảnh của đường thẳng a.

ii) Đường thẳng b có vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1 ; -2)$ nên phép tịnh tiến T biến b thành chính nó. Vậy ảnh của b cũng có phương trình $2x + y + 100 = 0$.

b) Nếu $M(x ; y)$ nằm trên đường tròn đã cho thì

$$x^2 + y^2 - 4x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y' + 2)^2 - 4(x' - 1) + (y' + 2) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 6x' + 5y' + 10 = 0.$$

Như vậy điểm $M'(x' ; y')$ thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 5y + 10 = 0$.
Đó là phương trình đường tròn ảnh của đường tròn đã cho.

8. Giả sử điểm $M(x ; y)$ nằm trên đường thẳng $d : Ax + By + C = 0$. Khi đó ảnh của M là điểm $M'(x' ; y')$ mà $x' = x + a$, $y' = y + b$ hay $x = x' - a$, $y = y' - b$. Suy ra $A(x' - a) + B(y' - b) + C = 0$, hay

$$Ax' + By' - aA - bB + C = 0. \quad (1)$$

Để phép tịnh tiến T biến d thành d' ta phải có $Ax' + By' + C' = 0$. (2)

So sánh (1) và (2) ta suy ra $aA + bB + C' - C = 0$ (*).

Vậy các vectơ $\vec{u}(a ; b)$ cần tìm phải có toạ độ thoả mãn điều kiện (*).

9. Giả sử F là phép dời hình biến A thành A, biến B thành B, biến C thành C. Nếu F không phải là phép đồng nhất thì có ít nhất một điểm M sao cho $F(M) = M'$ và M' khác với M. Khi đó, vì F biến A thành A và biến M thành M' nên $AM = AM'$, tương tự ta cũng có $BM = BM'$, $CM = CM'$. Vậy ba điểm A, B, C nằm trên đường trung trực của MM', trái với giả thiết A, B, C không thẳng hàng. Vậy F phải là phép đồng nhất.

10. Vì mỗi phép dời hình đều không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì, nên hợp thành của chúng cũng có tính chất đó, bởi vậy nó cũng là phép dời hình.

11. Giả sử phép dời hình F biến hai đường thẳng song song a và b thành hai đường thẳng a' và b'. Ta lấy đường thẳng c nào đó vuông góc với a và b, cắt a và b lần lượt tại A và B. Khi đó F biến A thành A' nằm trên a', biến B thành B' nằm trên b'. Vì $a \perp AB$ và $b \perp AB$ nên $a' \perp A'B'$ và $b' \perp A'B'$. Vậy $a' // b'$ và vì $AB = A'B'$ nên khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách giữa a' và b'.

12. Giả sử có hai phép dời hình khác nhau F_1 và F_2 cùng biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Khi đó, có ít nhất một điểm M sao cho F_1 biến M thành M'_1 và F_2 biến M thành M'_2 khác M'_1. Khi đó ta có

$$AM = A'M'_1 \text{ và } AM = A'M'_2$$

nên $A'M'_1 = A'M'_2$ hay A' nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng $M'_1M'_2$.
Tương tự, điểm B' và C' cũng nằm trên đường trung trực đó. Suy ra ba điểm A', B', C' thẳng hàng, vô lí.

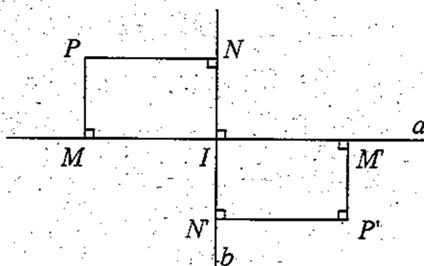
13. a) Phép dời hình F biến mỗi đường tròn $(O ; R)$ thành đường tròn $(O' ; R)$, trong đó điểm O' là ảnh của điểm O. Nếu hai đường tròn đó trùng nhau thì

O phải trùng với O' và do đó trùng với I. Vậy các đường tròn được biến thành chính nó khi và chỉ khi chúng có tâm là I.

b) Giả sử a là đường thẳng không đi qua I. Ta kẻ $IH \perp a$, $H \in a$. Khi đó F biến H thành H', biến đường thẳng IH thành đường thẳng IH' và biến đường thẳng a thành đường thẳng a' đi qua H' và vuông góc với IH' tại H'. Chú ý rằng vì a không đi qua I nên H không trùng với H'. Từ đó, suy ra a' không trùng với a.

14. (h.5)

Lấy điểm M bất kì nằm trên a và khác I, phép dời hình F biến a thành a nên biến điểm M thành điểm M' trên a, $IM = IM'$. Ngoài ra vì M khác M' nên I là trung điểm của MM'.



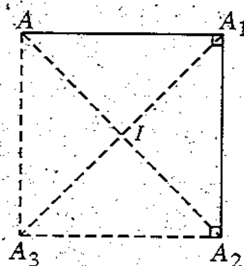
Hình 5

Gọi b là đường thẳng đi qua I, vuông góc với a thì F biến b thành đường thẳng đi qua I và vuông góc với a. Do đó b biến thành b. Cũng lập luận như trên, nếu N nằm trên b thì F biến N thành N' sao cho I là trung điểm của NN'.

Bây giờ giả sử điểm P không nằm trên a và b. Kẻ $PM \perp a$ và $PN \perp b$ ($M \in a$, $N \in b$). Theo chứng minh trên M biến thành M', N biến thành N' sao cho I là trung điểm của MM' và NN'. Suy ra P biến thành điểm P' sao cho $M'IN'P'$ là hình chữ nhật và do đó I là trung điểm của PP'.

15. (h.6)

Trước hết, F không thể biến hai điểm phân biệt thành chính nó vì khi đó đường thẳng đi qua hai điểm đó phải biến thành chính nó, trái với giả thiết là F biến đường thẳng thành đường thẳng vuông góc.



Hình 6

Để chứng minh sự tồn tại của điểm biến thành chính nó, ta hãy lấy một điểm A nào đó và gọi $A_1 = F(A)$, $A_2 = F(A_1)$.

Nếu A trùng A_1 thì A là điểm biến thành chính nó, bởi vậy ta giả sử rằng A khác A_1. Khi đó A_2 khác A_1 và đường thẳng A_1A_2 vuông góc với đường thẳng AA_1. Đường thẳng ảnh của AA_2 là đường thẳng d qua A_1, vuông góc với AA_2. Đường thẳng ảnh của A_1A_2 là đường thẳng d' qua A_2, vuông góc

với A_1A_2. Vậy F biến A_2 thành giao điểm A_3 của d và d'. Vì F là phép dời hình nên $AA_1A_2A_3$ là hình vuông. Trung điểm I của AA_2 biến thành trung điểm của A_1A_3, tức là I biến thành chính nó qua F. Vậy F có duy nhất điểm I biến thành chính nó.

16. Nếu F là phép dời hình có tính chất đã cho thì dễ thấy F không có điểm biến thành chính nó, vì nếu I là điểm như thế thì đường thẳng a đi qua I biến thành đường thẳng a' cũng đi qua I nên a' không song song với a.

Ta lấy một điểm A bất kì, gọi $A' = F(A)$ và $A'' = F(A')$ thì đường thẳng a đi qua A và A' biến thành đường thẳng a' đi qua A' và A'', do đó a và a' cắt nhau tại A', vô lí. Vậy không có phép dời hình F có tính chất đã cho.

17. Ta lấy hai điểm bất kì $M = (x_0\,;\,y_0)$ và $N = (x_1\,;\,y_1)$. Khi đó F biến M, N lần lượt thành M', N' có toạ độ

$M' = (ax_0 + by_0 + p\,;\,cx_0 + dy_0 + q)$ và $N' = (ax_1 + by_1 + p\,;\,cx_1 + dy_1 + q)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} M'N'^2 &= [a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)]^2 + [c(x_1 - x_0) + d(y_1 - y_0)]^2 \\ &= (a^2 + c^2)(x_1 - x_0)^2 + (b^2 + d^2)(y_1 - y_0)^2 + 2(ab + cd)(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \\ &= MN^2. \end{aligned}$$

Như vậy $M'N' = MN$.

Vậy F là phép dời hình.

§3. Phép đối xứng trục

18. a) Giả sử M nằm trên đường thẳng AB và M' là ảnh của M qua phép dời hình F. Khi đó, vì F biến đường thẳng AB thành đường thẳng AB và giữ nguyên thứ tự ba điểm A, B, M cũng giống như thứ tự ba điểm A, B, M'. Ngoài ra vì $AM = AM'$ và $BM = BM'$, nên điểm M phải trùng với M'.

b) Gọi N là một điểm không nằm trên đường thẳng AB và $N' = F(N)$. Ta có N' khác N, vì nếu $N' \equiv N$ thì F là phép đồng nhất. Như vậy, hai tam giác ABN và ABN' bằng nhau suy ra N và N' đối xứng với nhau qua đường thẳng AB. Vậy F là phép đối xứng qua AB.

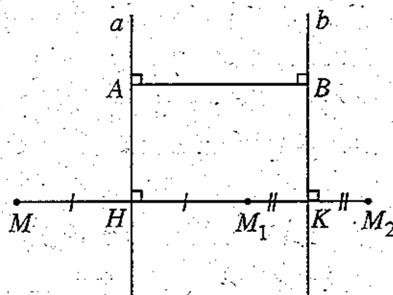
19. Gọi F là phép dời hình biến A thành A, B thành B, ta lấy điểm C không thẳng hàng với A, B và C' là ảnh của C qua phép dời hình F. Khi đó tam giác ABC bằng tam giác ABC'. Chỉ có hai trường hợp xảy ra :

+ Điểm C' trùng với điểm C. Khi đó F là phép đồng nhất (bài tập 9).

+ Điểm C' đối xứng với điểm C qua đường thẳng AB. Khi đó F là phép đối xứng qua đường thẳng AB (bài tập 12).

20. a) (h.7)

Giả sử $Đ_a$, $Đ_b$ là các phép đối xứng trục có trục lần lượt là a, b mà $a \parallel b$ và F là hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_b$. Lấy hai điểm A, B lần lượt nằm trên a, b sao cho $AB \perp a$. Với điểm M bất kì, $Đ_a$ biến M thành M_1 và $Đ_b$ biến M_1 thành M_2. Nếu gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM_1 và M_1M_2 thì



Hình 7

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$= 2(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1K}) = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB}.$$

Vì phép hợp thành F biến M thành M_2 mà $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{AB}$ nên F là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

b) Giả sử T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Lấy một đường thẳng a nào đó vuông góc với $\vec{u}$ và đường thẳng b là ảnh của a qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec{u}$ thì theo câu a) phép tịnh tiến T là hợp thành của phép đối xứng trục $Đ_a$ và phép đối xứng trục $Đ_b$. Vì có nhiều cách chọn đường thẳng a, nên có nhiều phép đối xứng $Đ_a$ và $Đ_b$ có hợp thành là T.

c) Hợp thành của hai phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến. Vì vậy, hợp thành của $2n$ phép đối xứng trục (có trục đối xứng song song) là hợp thành của n phép tịnh tiến, do đó cũng là phép tịnh tiến.

d) Giả sử F là hợp thành của $2n + 1$ phép đối xứng trục. Gọi phép đối xứng trục thứ nhất là $Đ_a$ (có trục là đường thẳng a), $2n$ phép đối xứng trục còn lại có hợp thành là phép tịnh tiến T. Ta có thể xem T là hợp thành của hai phép đối xứng mà phép thứ nhất là $Đ_a$ và phép thứ hai là $Đ_b$. Vậy F là hợp thành của ba phép đối xứng : $Đ_a$, $Đ_a$ và $Đ_b$. Nhưng vì hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_a$ là phép đồng nhất e nên F chính là phép đối xứng $Đ_b$.

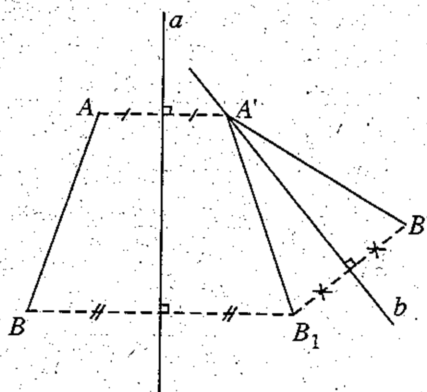
e) Có thể xem phép tịnh tiến T là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_b$ và $Đ_c$. Vì vectơ tịnh tiến vuông góc với a nên $a \parallel b \parallel c$. Do đó, ta được hợp

thành của ba phép đối xứng có trục song song. Vậy theo kết quả câu d), ta được một phép đối xứng trục.

21. (h.8)

Nếu A và A' trùng nhau, B và B' trùng nhau thì phép cần tìm là phép đối xứng trục có trục AB.

Nếu A không trùng A' thì ta lấy a là trung trực của AA'. Khi đó phép đối xứng trục $Đ_a$ biến A thành A'. Kí hiệu B_1 là ảnh của B qua phép $Đ_a$. Nếu B_1 trùng B' thì $Đ_a$ là phép đối xứng trục cần tìm. Nếu B_1 khác với B' thì $A'B_1 = AB$ nên $A'B_1 = A'B'$. Từ đó, suy ra đường trung trực b của đoạn thẳng B_1B' đi qua điểm A' và do đó phép đối xứng trục $Đ_b$ biến A' thành A' và biến B_1 thành B'.



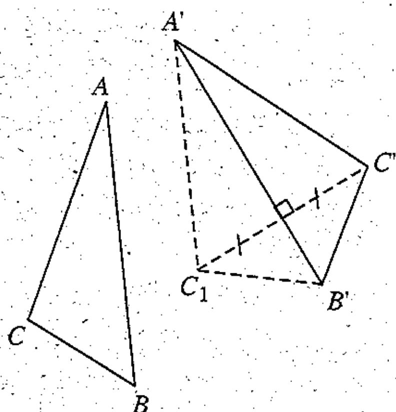
Hình 8

Vậy hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ là phép dời hình biến A thành A' và biến B thành B'.

22. (h.9)

Theo bài toán trên ta có hai phép đối xứng trục $Đ_1$ và $Đ_2$ mà hợp thành của chúng biến A thành A' và biến B thành B'. Phép hợp thành đó là phép dời hình nên nó biến điểm C thành điểm C_1 sao cho hai tam giác ABC và $A'B'C_1$ bằng nhau. Vậy C_1 phải trùng với C' hoặc đối xứng với C' qua đường thẳng $A'B'$. Nếu C_1 trùng với C' thì phép hợp thành nói trên là phép cần tìm.

Nếu C_1 khác với C' thì vì hai tam giác $A'B'C_1$ và $A'B'C'$ bằng nhau nên phép đối xứng $Đ_c$ với c là đường thẳng $A'B'$ sẽ biến tam giác $A'B'C_1$ thành tam giác $A'B'C'$. Vậy hợp thành của ba phép $Đ_a$, $Đ_b$ và $Đ_c$ là phép dời hình cần tìm.



Hình 9

23. a) Phép đối xứng qua Ox biến điểm $M(x\,;\,y)$ thành điểm $M'(x'\,;\,y')$ mà $x = x'$ và $y = -y'$. Nếu $M(x\,;\,y)$ nằm trên d thì $Ax + Bx + C = 0$ hay $Ax' - By' + C = 0$. Vậy $M'(x'\,;\,y')$ thoả mãn phương trình $Ax - By + C = 0$. Đó là phương trình ảnh của d qua phép đối xứng trục Ox.

b) Phép đối xứng qua Oy biến điểm $M(x\,;\,y)$ thành điểm $M'(x'\,;\,y')$ mà $x = -x'$ và $y = y'$. Nếu $M(x\,;\,y)$ nằm trên $(\mathscr{C})$ thì

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 2ax' + 2by' + c = 0.$$

Vậy $M'(x'\,;\,y')$ thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 - 2ax + 2by + c = 0$. Đó là phương trình ảnh của $(\mathscr{C})$ qua phép đối xứng trục với trục là Oy.

c) Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là $I(-a\,;\,-b)$, rõ ràng tâm I nằm trên đường thẳng $bx - ay = 0$. Suy ra phép đối xứng qua đường thẳng đó biến $(\mathscr{C})$ thành chính nó. Vậy ảnh của $(\mathscr{C})$ có phương trình trùng với phương trình của $(\mathscr{C})$.

24. (h.10)

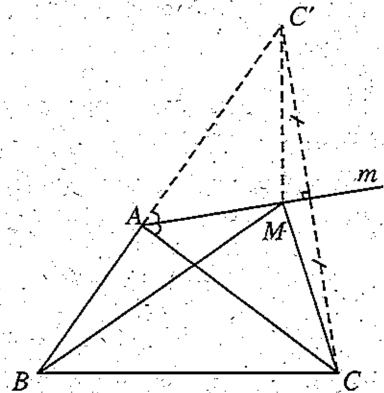
Gọi C' là điểm đối xứng với điểm C qua đường phân giác ngoài m. Khi đó hiển nhiên A nằm giữa B và C'. Với mọi điểm M nằm trên m ta có

$MB + MC = MB + MC' \geq BC'$.

Mà $BC' = AB + AC' = AB + AC$.

Vậy $MB + MC + BC \geq AB + AC + BC$.

Đó là điều phải chứng minh.



Hình 10

25. (h.11)

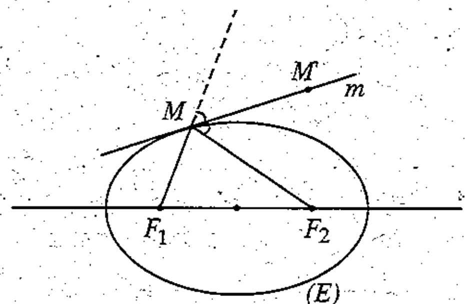
Giả sử elip (E) có trục lớn là $2a$, tức là điểm M nằm trên (E) khi và chỉ khi

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Theo chứng minh bài tập 24, nếu M' nằm trên phân giác m thì

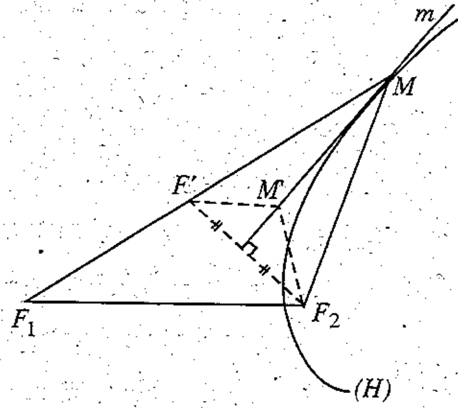
$$M'F_1 + M'F_2 \geq MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M' trùng M. Vậy nếu M' khác M thì M' không nằm trên (E). Từ đó, suy ra m cắt (E) tại điểm duy nhất M.



Hình 11

26. (h.12)



Hình 12

Giả sử hypebol (H) có trục thực là $2a$, nghĩa là điểm M nằm trên (H) khi và chỉ khi

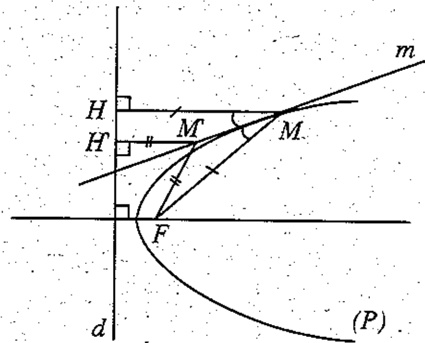
$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

Ta xét trường hợp $MF_1 - MF_2 = 2a$ (trường hợp $MF_2 - MF_1 = 2a$ chứng minh tương tự). Gọi F' là điểm đối xứng với F_2 qua phân giác m thì F' nằm giữa M và F_1. Khi đó, nếu lấy M' nằm trên m thì

$$\begin{aligned} M'F_1 - M'F_2 = M'F_1 - M'F' \le F_1F' &= MF_1 - MF' \\ &= MF_1 - MF_2 \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi M' trùng M. Vậy nếu M' khác M thì M' không nằm trên (H). Từ đó suy ra m cắt (H) tại điểm duy nhất M.

27. (h.13)



Hình 13

Vì M nằm trên parabol (P) nên $MF = MH$. Do đó m chính là đường trung trực của đoạn thẳng FH. Lấy điểm M' tuỳ ý nằm trên m, kẻ

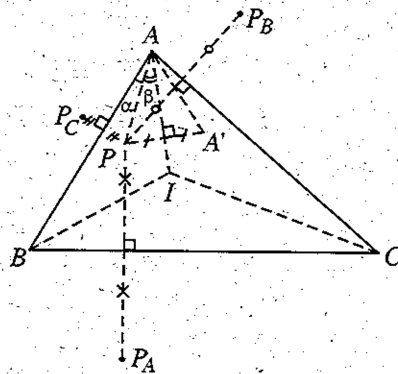
$$M'H' \perp d \ (H' \in d)$$

thì ta có $M'F = M'H \ge M'H'$.

Nếu M' không trùng với M thì $M'F > M'H'$ nên M' không nằm trên (P).

Vậy M chỉ cắt (P) tại điểm duy nhất M.

28. (h.14)



Hình 14

Ta xét trường hợp P nằm trong góc BAI. Gọi P_A, P_B, P_C là các điểm đối xứng với P lần lượt qua các đường thẳng BC, CA, AB. Ta chứng minh rằng AA' là đường trung trực của đoạn thẳng P_BP_C. Thật vậy, nếu ta kí hiệu $\widehat{PAB} = \alpha$, $\widehat{PAI} = \beta$, ta có

$$\widehat{P_CAA'} = \widehat{P_CAP} + \widehat{PAA'} = 2\alpha + 2\beta$$

và

$$\widehat{A'AP_B} = \widehat{A'AC} + \widehat{CAP_B} = \widehat{A'AC} + \widehat{CAP} = \alpha + \alpha + 2\beta = 2\alpha + 2\beta.$$

Vậy $\widehat{P_CAA'} = \widehat{A'AP_B}$.

Ngoài ra, hiển nhiên $AP_C = AP_B$. Suy ra AA' là đường trung trực của đoạn thẳng P_BP_C. Chứng minh tương tự, ta cũng có BB' là đường trung trực của đoạn thẳng P_CP_A và CC' là đường trung trực của đoạn thẳng P_AP_B. Suy ra AA', BB', CC' đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $P_AP_BP_C$.

Trường hợp P nằm trong góc CAI, lập luận tương tự.

29. (h.15)

Trước hết, dễ thấy rằng các điểm A, B, C lần lượt nằm trên các cạnh $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ của tam giác $A'B'C'$ và các đường thẳng AA', BB', CC' đi qua tâm O của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

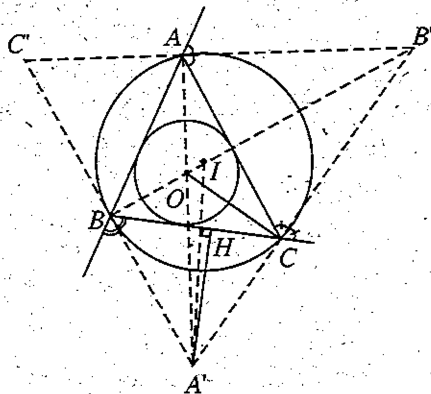
Kẻ $A'H \perp BC$ ($H \in BC$) ta có

$$\widehat{CA'H} = \widehat{OCB}$$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc) và

$$\widehat{OCB} = \widehat{BA'O}$$

(do tứ giác $OBA'C$ nội tiếp đường tròn).



Hình 15

Từ đó, suy ra

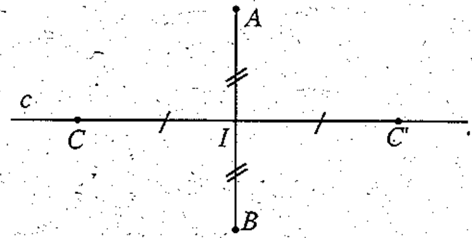
$$\widehat{CA'H} = \widehat{BA'O}.$$

Do đó, nếu gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$ thì $A'I$ là phân giác góc $B'A'C'$ nên $A'H$ đối xứng với $A'O$ qua đường thẳng $A'I$. Bởi vậy $A'H$ đi qua điểm đối xứng với O qua phân giác $A'I$. Tương tự ta cũng có đường thẳng đi qua B', vuông góc với AC cũng đi qua điểm đối xứng với O qua $B'I$ và đường thẳng đi qua C', vuông góc với AB cũng đi qua điểm đối xứng với O qua $C'I$. Từ đó, áp dụng bài tập 28 ta suy ra điều phải chứng minh.

§4. Phép quay và phép đối xứng tâm

30. (h.16)

Vì F biến A thành B và biến B thành A nên F biến trung điểm I của AB thành chính nó. Nếu gọi c là đường trung trực của AB thì F biến c thành chính nó. Trên c lấy hai điểm C và C' đối xứng với nhau qua I thì hoặc F biến C thành C hoặc F biến C thành C'.



Hình 16

Nếu F biến C thành C thì F biến tam giác ABC thành tam giác BAC. Vậy F chính là phép đối xứng trục $Đ_c$.

Nếu F biến C thành C' thì F biến tam giác ABC thành tam giác BAC'. Vậy F chính là phép đối xứng tâm $Đ_I$.

31. (h.17)

Giả sử Q và Q' là hai phép quay có tâm O với góc quay lần lượt là φ và φ', còn F là hợp thành của Q và Q'. Với mọi điểm M khác O, giả sử Q biến M thành M_1 và Q' biến M_1 thành M_2. Khi đó, ta có

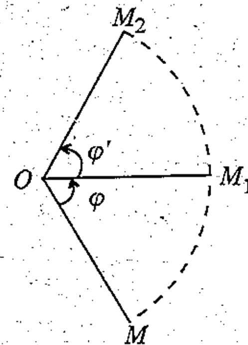
$OM = OM_1 = OM_2$

$(OM, OM_1) = \varphi, (OM_1, OM_2) = \varphi'$.

Suy ra $OM = OM_2$

và $(OM, OM_2) = (OM, OM_1) + (OM_1, OM_2)$

$= \varphi + \varphi'$.



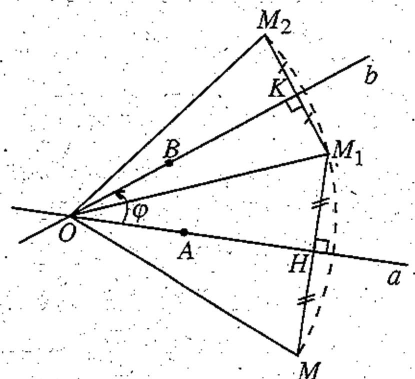
Hình 17

Vậy hợp thành F là phép quay tâm O góc quay bằng $\varphi + \varphi'$.

Từ đó suy ra : *Hợp thành của một số hữu hạn phép quay có tâm trùng nhau là một phép quay với tâm đó và có góc quay bằng tổng các góc quay của các phép quay đã cho.*

32. a) (h.18)

Giả sử cho hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ có trục a và b cắt nhau tại O,



Hình 18

còn F là hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_b$. Lấy hai điểm A, B khác O lần lượt nằm trên a, b sao cho góc AOB không tù và đặt $\varphi = (OA, OB)$.

(Chú ý rằng khi đó $|\varphi| = \widehat{AOB}$ là góc hợp bởi hai đường thẳng a và b).

Với mọi điểm M khác O, giả sử $Đ_a$ biến M thành M_1 và $Đ_b$ biến M_1 thành M_2. Khi đó, nếu gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM_1 và M_1M_2 thì ta có

$$OM = OM_1 = OM_2$$

và $(OM, OM_2) = (OM, OM_1) + (OM_1, OM_2)$

$= 2(OH, OM_1) + 2(OM_1, OK)$

$= 2(OH, OK) = 2\varphi.$

Vậy phép hợp thành F là phép quay tâm O góc quay 2φ.

b) Giả sử Q là phép quay tâm O góc quay φ. Ta lấy đường thẳng a nào đó đi qua O và b là ảnh của a qua phép quay tâm O góc quay $\frac{\varphi}{2}$ thì hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ chính là phép quay Q (theo câu a)). Cố nhiên có thể chọn a bằng nhiều cách khác nhau.

c) Nếu F là hợp thành của $2n$ phép đối xứng có trục đối xứng đồng quy tại O thì F là hợp thành của n phép quay có tâm O và do đó F là một phép quay.

d) Giả sử F là hợp thành của $2n + 1$ phép đối xứng trục có các trục đều đi qua O. Gọi $Đ_a$ là phép đối xứng đầu tiên, thì $2n$ phép đối xứng trục còn lại có hợp thành là phép quay Q tâm O. Ta xem Q là hợp thành của hai phép đối xứng trục, trong đó phép thứ nhất là $Đ_a$ và phép thứ hai là $Đ_b$. Như vậy, F là hợp thành của ba phép đối xứng trục : $Đ_a$, $Đ_a$ và $Đ_b$. Vậy F chính là phép đối xứng trục $Đ_b$.

33. Phép đối xứng qua điểm I biến A thành C. Vậy quỹ tích C là đường tròn đối xứng với (O) qua I.

Phép quay Q tâm I góc quay 90° biến A thành B (hoặc thành D), phép quay Q' tâm I góc quay -90° biến A thành D (hoặc thành B). Vậy quỹ tích B và D là ảnh của (O) qua hai phép quay đó.

34. Phép quay tâm G góc quay 120° biến A thành B (hoặc C) và phép quay tâm G góc quay 240° biến A thành C (hoặc thành B). Vậy quỹ tích B và C là ảnh của đường thẳng a qua hai phép quay nói trên.

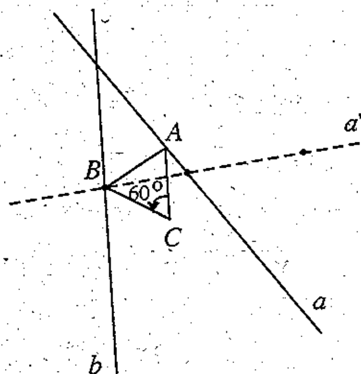
35. Gọi D là trung điểm của MM_3 thì $ABCD$ là hình bình hành. Do đó, điểm D cố định. Vì phép đối xứng qua điểm D biến M thành M_3 nên quỹ tích M_3 là ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng đó.

36. (h.19)

Giả sử đã dựng được tam giác đều ABC thoả mãn điều kiện đã cho. Khi đó, góc

$$(CA, CB) = \pm 60^\circ.$$

Nếu $(CA, CB) = 60^\circ$ thì phép quay Q tâm C góc quay 60° sẽ biến A thành B và biến đường thẳng a thành đường thẳng a' đi qua B. Vậy ta có thể xác định điểm B như sau :



Hình 19

Dựng đường thẳng a' là ảnh của đường thẳng a qua phép quay Q, rồi lấy giao điểm B của a' và b. Điểm A được xác định như là ảnh của B qua phép quay tâm C góc quay -60°.

Làm tương tự cho trường hợp $(CA, CB) = -60^\circ$.

Bài toán có ít nhất một nghiệm hình, có thể có vô số nghiệm hình.

37. Giả sử đã dựng được tam giác đều MNP thoả mãn điều kiện của bài toán. Nếu dùng phép quay Q tâm M góc quay 60° thì N biến thành P và hình vuông $ABCD$ biến thành hình vuông $A'B'C'D'$ mà P cũng nằm trên hình vuông này. Từ đó, suy ra cách dựng.

38. Nếu F là phép dời hình biến tam giác đều ABC thành chính nó thì F phải biến đỉnh của tam giác thành đỉnh của tam giác đó. Ta có thể kí hiệu tam giác với đỉnh A, B, C theo sáu cách khác nhau :

$$ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA$$

cho nên ta có sáu phép dời hình biến tam giác ABC thành một trong sáu tam giác kể trên. Cụ thể là :

a) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác ABC : Đó là phép đồng nhất.

b) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác ACB : Đó là phép đối xứng qua đường trung trực của cạnh BC.

c) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác BCA : Đó là phép quay tâm O (tâm của tam giác đều) với góc quay 120°.

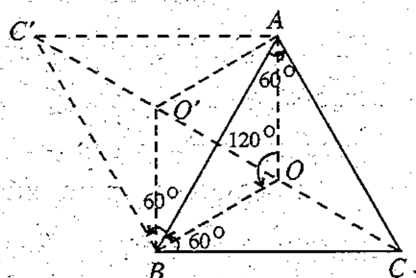
d) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác BAC : Đó là phép đối xứng qua trung trực của cạnh AB.

e) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác CAB : Đó là phép quay quanh O với góc quay -120°.

f) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác CBA : Đó là phép đối xứng qua trung trực của cạnh AC.

39. (h.20)

a) Ta gọi C' là điểm đối xứng với điểm C qua AB. Phép quay Q_B biến A thành C', B thành B và biến C thành A. Phép quay Q_A biến C' thành B, biến B thành C và biến A thành A. Vậy hợp thành F là phép dời hình biến ba điểm A, B, C lần lượt thành ba điểm B, C, A.



Hình 20

b) Từ câu a), suy ra : Nếu gọi O là tâm tam giác đều ABC thì F là phép quay tâm O góc quay 120°.

c) Chứng minh tương tự, phép hợp thành của Q_A và Q_B là phép quay tâm O', góc quay 120°, trong đó O' là tâm của tam giác đều ABC'.

40. a) Hợp thành của $Đ_{BC}$ và $Đ_{AB}$ là phép quay Q_B tâm B góc quay 120°.

b) Hợp thành của $Đ_{AB}$ và $Đ_{AC}$ là phép quay Q_A tâm A góc quay 120°.

c) Hợp thành F của Q_B và Q_A là hợp thành của bốn phép đối xứng theo thứ tự là : $Đ_{BC}$, $Đ_{AB}$, $Đ_{AB}$, $Đ_{AC}$. Vì hợp thành của $Đ_{AB}$ và $Đ_{AB}$ là phép đồng nhất nên F là hợp thành của hai phép $Đ_{BC}$ và $Đ_{AC}$. Vậy F là phép quay tâm C với góc quay 240° (hoặc có thể nói là góc quay -120°).

41. Nếu F là phép dời hình biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó thì F biến tâm O của hình vuông thành chính nó. Vì F biến đỉnh A thành một trong các đỉnh A, B, C, D nên ta có các trường hợp sau :

a) F biến A thành chính nó : Khi đó F hoặc là phép đồng nhất, hoặc là phép đối xứng qua đường thẳng OA.

b) F biến A thành B : Khi đó F hoặc là phép đối xứng qua trung trực cạnh AB, hoặc là phép quay tâm O góc quay (OA, OB).

c) F biến A thành C : Khi đó F hoặc là phép đối xứng qua đường thẳng BD, hoặc là phép đối xứng tâm O.

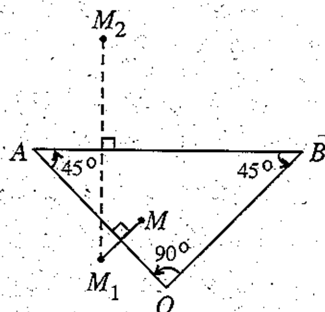
d) F biến A thành D : Khi đó F hoặc là phép đối xứng qua trung trực cạnh AD hoặc là phép quay với góc quay $(OA, OD) = 3(OA, OB)$.

42. (h.21)

Lấy điểm O sao cho tam giác OAB là tam giác vuông cân với góc

$(AO, AB) = (BA, BO) = 45^\circ$.

Khi đó, Q_A là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_{AO}$ và $Đ_{AB}$, còn Q_B là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_{AB}$ và $Đ_{BO}$. Vậy F là hợp thành của bốn phép đối xứng trục theo thứ tự : $Đ_{AO}, Đ_{AB}, Đ_{AB}, Đ_{BO}$, tức cũng là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_{AO}$ và $Đ_{BO}$. Vì AO vuông góc với BO nên F là phép quay tâm O góc quay 180°, tức là phép đối xứng qua điểm O. Chú ý rằng có thể xác định điểm O bởi điều kiện : Tam giác OAB vuông cân và $(OB, OA) = 90^\circ$.



Hình 21

Tương tự, F' là phép đối xứng qua tâm O', sao cho $O'AB$ là tam giác vuông cân mà $(OA, OB) = 90^\circ$.

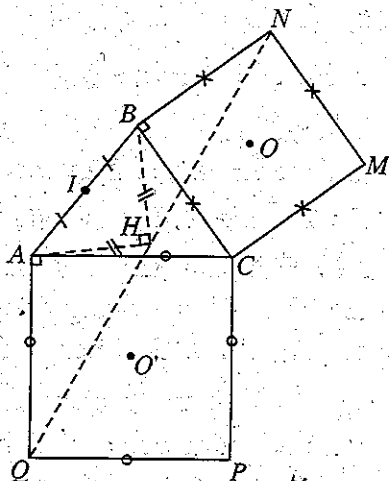
43. (h.22)

a) Q_A và Q_B lần lượt là các phép quay tâm A, B với góc quay

$$(AQ, AC) = (BC, BN) = 90^\circ.$$

Theo bài 42 ta có : Hợp thành của hai phép đó là phép đối xứng qua điểm H xác định. Vì phép đối xứng tâm H biến Q thành N nên H là trung điểm của đoạn thẳng NQ, tức là đường thẳng NQ luôn luôn đi qua điểm H cố định.

b) Gọi Q_O và $Q_{O'}$ là các phép quay có góc quay 90° với tâm quay tương ứng là O và O' thì phép hợp thành F của



Hình 22

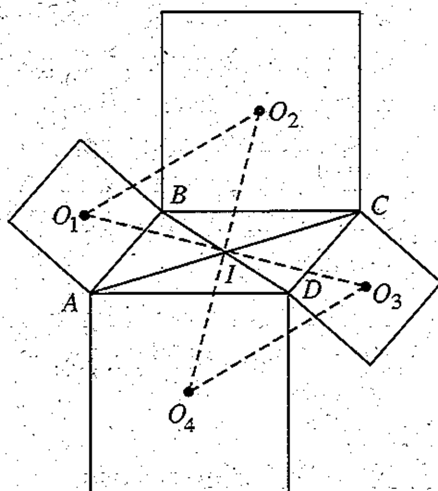
chúng biến B thành A. Nhưng vì F là phép đối xứng tâm, nên tâm đối xứng là trung điểm I của AB. Suy ra tam giác IOO' vuông cân tại đỉnh I.

Cách giải khác

Phép quay tâm C góc quay 90° biến A thành P và biến M thành B. Bởi vậy, ta có $AM = PB$ và $AM \perp PB$. Chú ý rằng IO là đường trung bình của tam giác ABM và IO' là đường trung bình của tam giác APB nên ta suy ra IOO' là tam giác vuông cân.

44. (h.23)

Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm các hình vuông có cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$ thì I là tâm đối xứng của hình gồm hình bình hành và bốn hình vuông đã cho. Bởi vậy I là trung điểm của O_1O_3 và O_2O_4. Nói cách khác $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành. Xét tam giác ABC, theo kết quả bài tập 43 ta có IO_1O_2 là tam giác vuông cân. Vậy $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

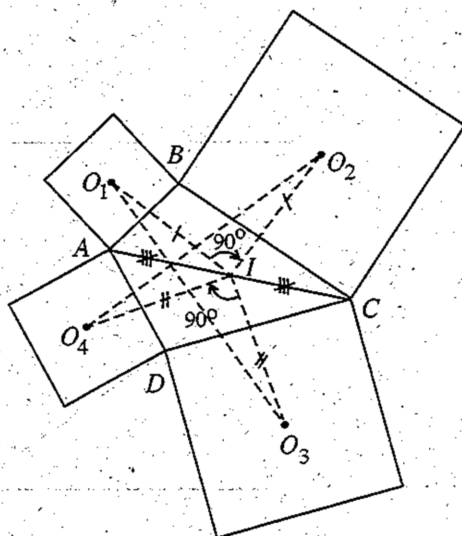


Hình 23

45. (h.24)

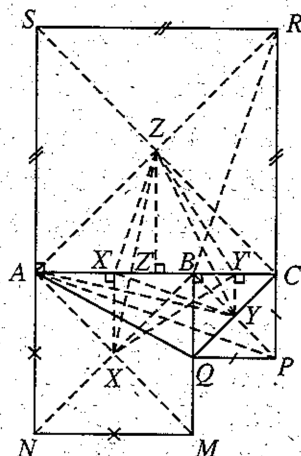
Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm các hình vuông có cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA và I là trung điểm của đoạn thẳng AC. Xét tam giác ABC và tam giác ACD thì theo kết quả bài tập 43 ta có IO_1O_2 và IO_4O_3 là những tam giác vuông cân. Từ đó, suy ra phép quay tâm I góc quay -90° biến O_1 thành O_2 và biến O_3 thành O_4. Do đó, ta có

$O_1O_3 = O_2O_4$ và $O_1O_3 \perp O_2O_4$.



Hình 24

46. (h.25)



Hình 25

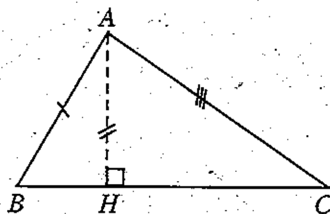
a) Phép quay tâm B góc quay 90^o biến A thành M và Q thành C. Bởi vậy, biến đoạn thẳng AQ thành MC. Suy ra hai đoạn thẳng AQ, MC bằng nhau và vuông góc với nhau. Chú ý rằng $Z'X$ là đường trung bình của tam giác AMC, còn $Z'Y$ là đường trung bình của tam giác CAQ nên tam giác $Z'XY$ vuông cân tại đỉnh Z'.

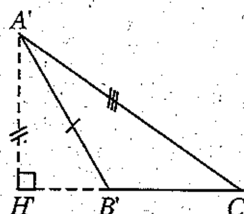
Dùng phép quay tâm C góc quay 90^o ta chứng minh được hai đoạn thẳng PA, BR bằng nhau và vuông góc với nhau. Suy ra XYZ là tam giác vuông cân tại X'. Tương tự cũng chứng minh được $Y'XZ$ là tam giác vuông cân tại Y'.

b) Phép quay tâm X' góc quay 90^o biến điểm A thành điểm X và biến điểm Y thành điểm Z. Suy ra hai đoạn thẳng AY, XZ bằng nhau và vuông góc với nhau.

§5. Hai hình bằng nhau

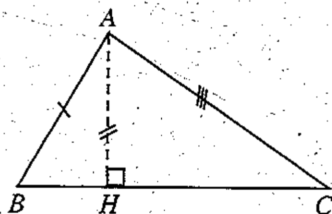
47. a) Có thể không bằng nhau (xem hình 26).

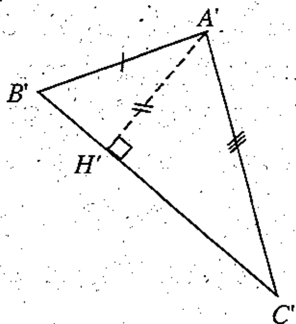




Hình 26

b) (h.27)

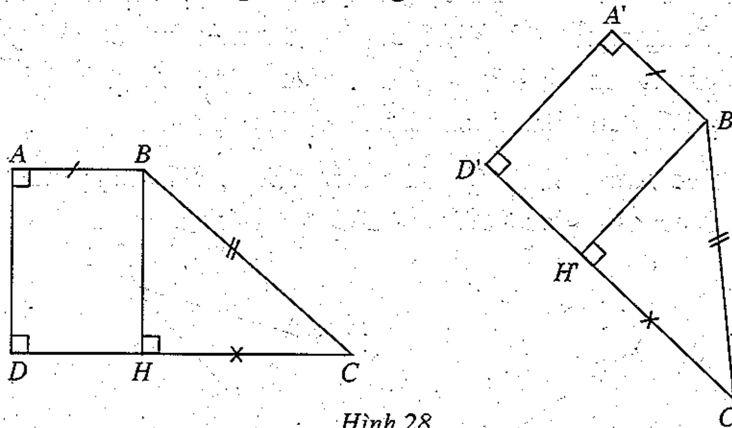




Hình 27

Vì góc $\widehat{A}$ và $\widehat{A'}$ là góc tù nên các góc $\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{B'}, \widehat{C'}$ đều là góc nhọn. Suy ra H ở giữa B và C, H' ở giữa B' và C'. Vì hai tam giác vuông ABH và $A'B'H'$ bằng nhau nên có phép dời hình F biến A, B, H lần lượt thành A', B', H'. Dễ thấy rằng khi đó F biến C thành C'. Vậy F biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ nên hai tam giác đó bằng nhau.

48. (h.28)



Hình 28

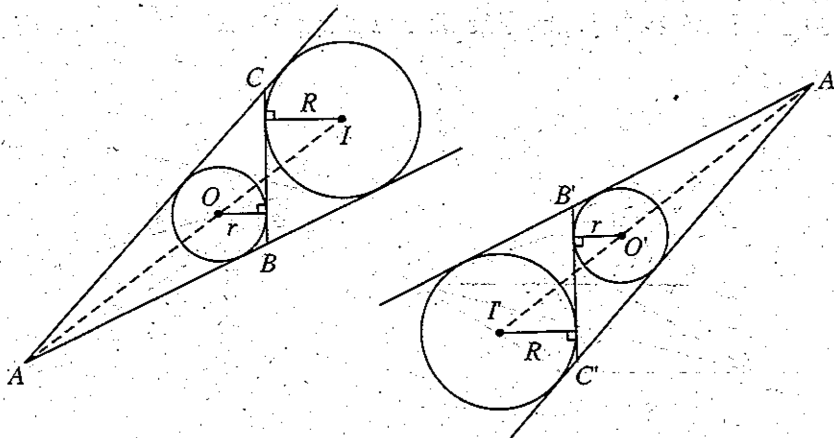
Nếu $AB = CD$ thì kết quả là hiển nhiên.

Giả sử $AB < CD$. Kẻ $BH \perp CD$, $B'H' \perp C'D'$.

Ta có $CH = CD - AB = C'D' - A'B' = C'H'$.

Từ đó, suy ra hai tam giác vuông BHC và $B'H'C'$ bằng nhau. Gọi F là phép dời hình biến tam giác BHC thành tam giác $B'H'C'$, thì dễ thấy rằng F biến A thành A' và biến D thành D'. Do đó F biến hình thang $ABCD$ thành hình thang $A'B'C'D'$. Vậy hai hình thang đó bằng nhau.

49. (h.29)



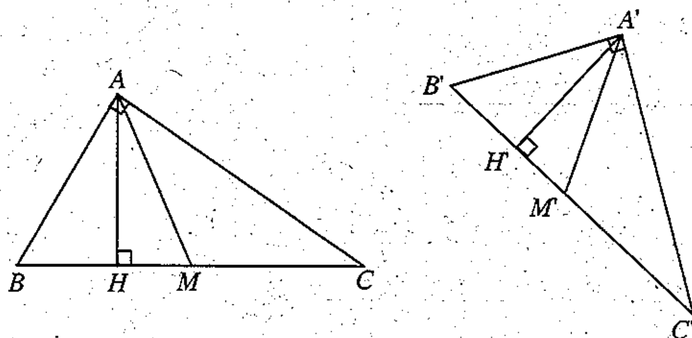
Hình 29

Giả sử tam giác ABC có đường tròn nội tiếp $(O\ ;\ r)$, đường tròn bàng tiếp góc A là $(I\ ;\ R)$; tam giác $A'B'C'$ có đường tròn nội tiếp $(O'\ ;\ r)$, đường tròn bàng tiếp góc A' là $(I'\ ;\ R)$; đồng thời $OI = O'I'$.

Vì $OI = O'I'$ nên có phép dời hình F biến O thành O' và I thành I', khi đó F biến $(O\ ;\ r)$ thành $(O'\ ;\ r)$ và biến $(I\ ;\ R)$ thành $(I'\ ;\ R)$. Mặt khác F biến cặp tiếp tuyến chung ngoài AB và AC của hai đường tròn (O) và (I) thành cặp tiếp tuyến chung ngoài $A'B'$ và $A'C'$ (hoặc thành $A'C'$ và $A'B'$), còn tiếp tuyến chung BC phải biến thành tiếp tuyến chung $B'C'$.

Suy ra F biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ hoặc thành tam giác $A'C'B'$, tức là hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

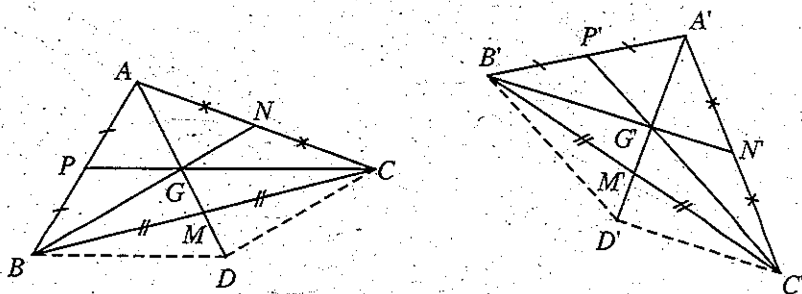
50. (h.30)



Hình 30

Cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ vuông tại các đỉnh A, A'. Có $BC = B'C'$ và hai đường cao AH, $A'H'$ bằng nhau. Gọi AM, $A'M'$ là các đường trung tuyến thì $AM = A'M'$ và do đó hai tam giác vuông AHM và $A'H'M'$ bằng nhau. Gọi F là phép dời hình biến tam giác AHM thành tam giác $A'H'M'$ thì dễ thấy rằng F biến đoạn thẳng BC thành đoạn thẳng $B'C'$ (hoặc thành đoạn thẳng $C'B'$). Vậy hai tam giác đã cho bằng nhau.

51. (h.31)



Hình 31

Giả sử tam giác ABC có ba trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G ; tam giác $A'B'C'$ có ba trung tuyến $A'M'$, $B'N'$, $C'P'$ cắt nhau tại G' và $AM = A'M'$, $BN = B'N'$, $CP = C'P'$.

Ta lấy điểm D và D' sao cho $BGCD$ và $B'G'C'D'$ là những hình bình hành. Dễ thấy rằng hai tam giác GCD và $G'C'D'$ bằng nhau. Bởi vậy, có một phép dời hình F biến G, C, D lần lượt thành các điểm G', C', D'. Rõ ràng khi đó F biến A thành A', B thành B' nên hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

52. *Hướng dẫn.* Hãy chứng minh rằng bán kính các đường tròn tâm A và tâm A' bằng nhau, bán kính các đường tròn tâm B và tâm B' bằng nhau, bán kính các đường tròn tâm C và tâm C' bằng nhau. Suy ra phép dời hình F biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ sẽ biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$.

§6, §7. Phép vị tự. Phép đồng dạng

53. (h.32)

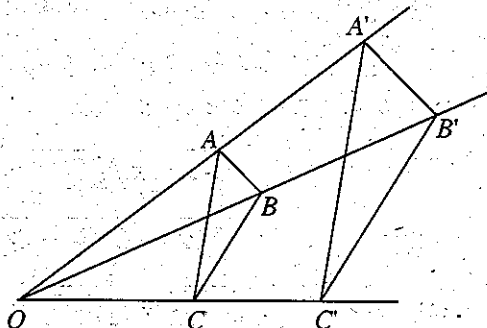
Vì AB và $A'B'$ song song nhưng không bằng nhau nên hai đường thẳng AA' và BB' cắt nhau tại điểm O.

Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số

$$k = \frac{OA'}{OA}$$

thì V biến điểm C thành điểm C_1 sao cho : $A'C_1 \parallel AC$, $B'C_1 \parallel BC$.

Suy ra C_1 trùng với C', tức là V cũng biến C thành C'. Vậy ta có điều phải chứng minh.



Hình 32

54. Lấy một điểm M bất kì, nếu V_1 biến M thành M_1 và V_2 biến M_1 thành M_2 thì

$\overrightarrow{O_1M_1} = k_1\overrightarrow{O_1M}$ và $\overrightarrow{O_2M_2} = k_2\overrightarrow{O_2M_1}$.

Khi đó, phép hợp thành F biến M thành M_2. Gọi I là ảnh của O_1 qua phép vị tự V_2, tức là $\overrightarrow{O_2I} = k_2\overrightarrow{O_2O_1}$.

Khi đó $\overrightarrow{IM_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1} = k_1k_2\overrightarrow{O_1M}$.

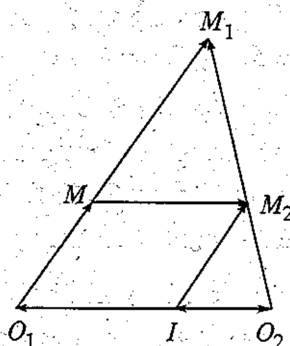
a) (h.33)

Nếu $k_1k_2 = 1$ thì $\overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{O_1M}$ nên

$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$.

Vậy trong trường hợp này F là phép tịnh tiến theo vectơ

$$\vec{u} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}.$$



Hình 33

b) (h.34)

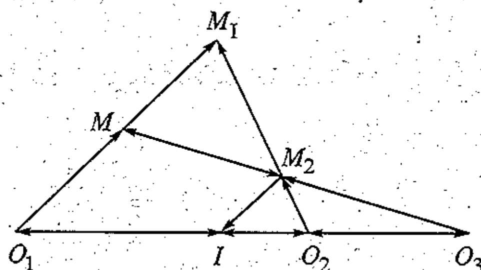
Nếu $k_1k_2 \neq 1$ ta chọn điểm O_3 sao cho

$$\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}.$$

Khi đó $\overrightarrow{O_3M_2} = \overrightarrow{O_3I} + \overrightarrow{IM_2}$

$$= k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1} + k_1k_2\overrightarrow{O_1M}$$

$$= k_1k_2\overrightarrow{O_3M}.$$



Hình 34

Vậy F là phép vị tự tâm O_3 tỉ số k_1k_2.

Chú ý rằng tâm O_3 của phép vị tự đó được xác định bởi đẳng thức

$$\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$$

hay $\quad \overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}.$

Suy ra $\quad \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} = (1-k_1k_2)\overrightarrow{O_1O_3}$

do đó $\quad \overrightarrow{O_1O_3} = \dfrac{1-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}.$

Cũng chú ý rằng tâm của ba phép vị tự V_1, V_2 và F là ba điểm thẳng hàng O_1, O_2 và O_3.

55. Phép vị tự tâm O_3^+ tỉ số $\dfrac{R_2}{R_1}$ biến đường tròn $(I_1\,;R_1)$ thành đường tròn $(I_2\,;R_2)$; phép vị tự tâm O_1^+ tỉ số $\dfrac{R_3}{R_2}$ biến đường tròn $(I_2\,;R_2)$ thành

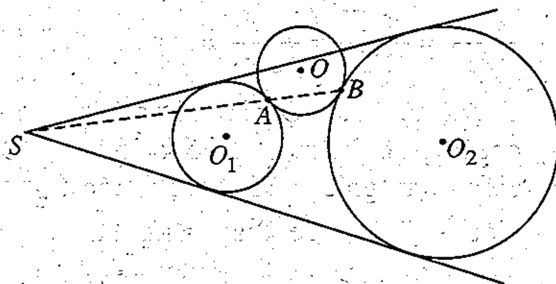
đường tròn $(I_3 ; R_3)$. Theo câu b) bài 54, phép hợp thành của hai phép vị tự đó là phép vị tự, có tỉ số

$$\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_2} = \frac{R_3}{R_1}$$

và biến đường tròn $(I_1 ; R_1)$ thành đường tròn $(I_3 ; R_3)$. Vậy tâm của phép vị tự hợp thành đó chính là điểm O_2^+. Suy ra ba điểm O_1^+, O_2^+, O_3^+ thẳng hàng. Chứng minh tương tự cho các bộ ba điểm còn lại.

56. (h.35)

Điểm A là tâm vị tự trong của (O_1) và (O), B là tâm vị tự trong của (O) và (O_2). Nếu gọi S là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2) thì theo bài tập 55, đường thẳng AB đi qua S.



Hình 35

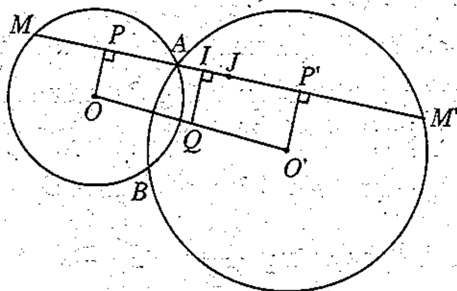
Nếu thay "tiếp xúc ngoài" bằng "tiếp xúc trong", đường thẳng AB cũng đi qua S. (Chứng minh tương tự như trường hợp tiếp xúc ngoài).

57. (h.36)

a) Gọi Q là trung điểm của OO' thì $QI \perp IA$. Suy ra quỹ tích I là đường tròn đường kính AQ.

b) Vì J là trung điểm MM' nên

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM'}\right)$$
$$= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP'} = 2\overrightarrow{AI}.$$

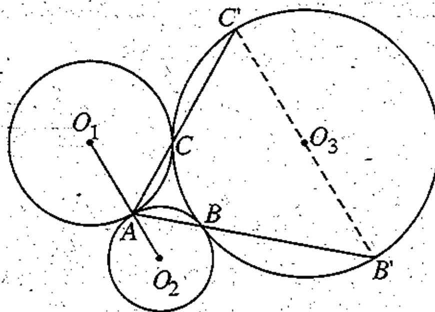


Hình 36

Vậy phép vị tự tâm A tỉ số 2 biến điểm I thành điểm J. Do đó, quỹ tích J là ảnh của đường tròn đường kính AQ qua phép vị tự đó.

58. (h.37)

Vì B là tâm vị tự trong của (O_2) và (O_3) nên $O_2A \parallel O_3B'$. Vì C là tâm vị tự trong của (O_1) và (O_3) nên $O_1A \parallel O_3C'$. Vì ba điểm O_1, A, O_2 thẳng hàng nên C', O_3, B' thẳng hàng. Như vậy $B'C'$ là đường kính của đường tròn (O_3).



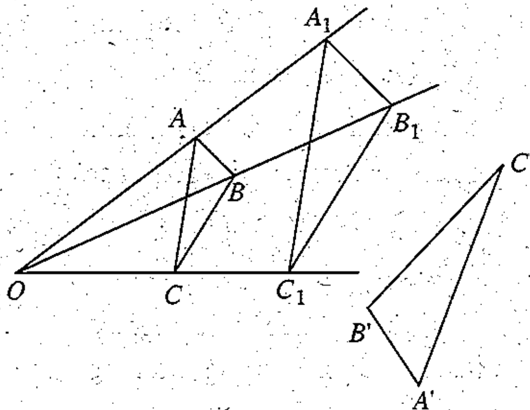
Hình 37

59. (h.38)

Giả sử hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k.$$

Chọn một điểm O nào đó và xét phép vị tự V tâm O tỉ số k thì V biến tam giác ABC thành tam giác $A_1B_1C_1$. Dễ thấy rằng hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A'B'C'$ bằng nhau. Do đó có phép dời hình F biến tam giác $A_1B_1C_1$ thành tam giác $A'B'C'$. Suy ra phép hợp thành của V và F là phép đồng dạng biến ABC thành $A'B'C'$.



Hình 38

60. a) Chú ý rằng $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DA} = k$

bởi vậy F biến tam giác ABD thành tam giác CAD.

b) Vì F biến đoạn thẳng BA thành AC và vì M, N lần lượt chia BA và AC theo cùng một tỉ số nên F biến M thành N, tức là góc (DM, DN) bằng góc quay φ.

Vậy tam giác DMN vuông tại D.

61. a) Dễ thấy rằng $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{CA} = k$

bởi vậy F biến A thành D và biến B thành A. Do đó F biến tam giác ABC thành tam giác DAC.

b) Vì F biến đoạn thẳng AB thành DA nên biến M thành N. Bởi vậy, phép $Đ_c$ biến CM thành CN, suy ra c là phân giác của góc MCN.

62. Dựng tam giác $AB'C'$ sao cho $\widehat{A} = \alpha$, $\frac{AB'}{AC'} = k$.

Gọi $AB' + B'C' + AC' = m'$.

Phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{m}{m'}$ sẽ biến tam giác $AB'C'$ thành tam giác ABC cần tìm.

63. Giả sử tam giác ABC có các đường cao AH, BI, CK và tam giác $A'B'C'$ có các đường cao $A'H'$, $B'I'$, $C'K'$ thoả mãn : $AH = A'H'$, $BI = B'I'$, $CK = C'K'$.

Trong tam giác ABC ta có $AB.CK = BC.AH = CA.BI$.

Cũng vậy, trong tam giác $A'B'C'$ ta có $A'B'.C'K' = B'C'.A'H' = C'A'.B'I'$.

Từ đó, suy ra $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$.

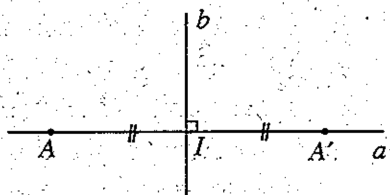
Như vậy, hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng. Do đó, có phép đồng dạng F tỉ số k biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Nhưng F biến đường cao AH thành đường cao $A'H'$ với $A'H' = AH$ nên $k = 1$. Do đó F là phép dời hình. Vậy tam giác ABC bằng tam giác $A'B'C'$.

Bài tập ôn tập chương I

64. (h.39)

Gọi a là đường thẳng đi qua A và A', b là đường thẳng đi qua I và vuông góc với a. Theo giả thiết F biến a thành chính nó, do đó F cũng biến b thành chính nó. Có thể xảy ra hai trường hợp :

– Mỗi điểm của b biến thành chính nó. Khi đó rõ ràng F là phép đối xứng qua đường thẳng b.



Hình 39

– Mỗi điểm của b biến thành điểm đối xứng qua I. Khi đó, tương tự như bài tập 14, ta có thể chứng minh rằng F là phép đối xứng qua tâm I.

65. Vì F không phải là phép đồng nhất nên có điểm A không trùng với ảnh A'. Nếu A' đối xứng với A qua I thì theo bài tập 64, F chính là phép đối xứng trục qua đường thẳng d đi qua I và vuông góc với AA', hoặc là phép đối xứng qua tâm I (tức là phép quay tâm I với góc quay 180^o).

Bây giờ xét trường hợp A' không đối xứng với A qua I, tức là ta có tam giác IAA'. Gọi A'' là ảnh của A' qua phép F. Khi đó, F biến tam giác IAA' thành tam giác $IA'A''$.

Có thể xảy ra hai trường hợp :

– A'' trùng với A. Khi đó, nếu gọi J là trung điểm của AA' thì J cũng là trung điểm của $A'A''$ nên F biến J thành J. Suy ra F biến mọi điểm của đường thẳng IJ thành chính nó. Vậy F là phép đối xứng qua đường thẳng IJ.

– A'' không trùng với A. Khi đó ta có $IA = IA' = IA''$ và $(IA, IA') = (IA', IA'')$ nên nếu gọi Q là phép quay tâm I góc quay $\varphi = (IA, IA')$ thì Q biến tam giác IAA' thành tam giác $IA'A''$ nên Q chính là F.

66. Vì F biến (O) thành chính nó nên F biến điểm O thành chính nó. Vậy theo bài tập 64, F là phép quay tâm O hoặc là phép đối xứng qua đường thẳng d chứa điểm O.

Trường hợp F là phép quay tâm O

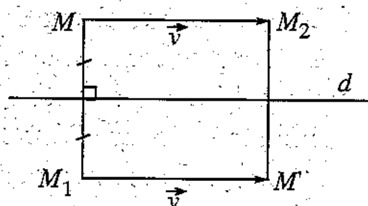
Nếu góc quay là 180° (khi đó F là phép đối xứng qua điểm O) thì hiển nhiên trung điểm của MM' là O. Khi đó quỹ tích của trung điểm MM' là điểm O.

Nếu góc quay khác 180° thì rõ ràng độ dài dây cung MM' không đổi, do đó quỹ tích của trung điểm MM' là đường tròn tâm O.

Trường hợp F là phép đối xứng qua đường thẳng d (đi qua O)

Hiển nhiên trung điểm của MM' nằm trên d và do đó quỹ tích trung điểm đó là một đường kính của đường tròn.

67. a) (h.40)

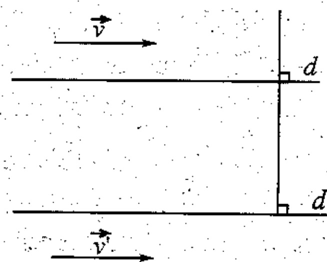


Hình 40

Giả sử M là một điểm nào đó, $Đ$ biến M thành M_1 và T biến M_1 thành M'. Như vậy, nếu gọi F là hợp thành của T và $Đ$ thì F biến M thành M'. Nếu ta lấy điểm M_2 sao cho $MM_1M'M_2$ là hình chữ nhật thì rõ ràng T biến M thành M_2 và $Đ$ biến M_2 thành M'. Vậy F cũng là hợp thành của T và $Đ$.

b) Hiển nhiên.

c) (h.41)



Hình 41

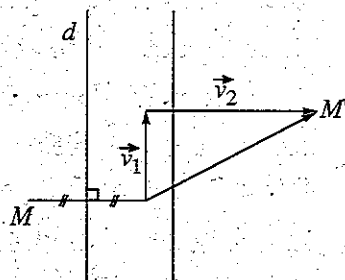
Giả sử phép đối xứng trượt F có trục d và vectơ trượt $\vec{v}$, phép đối xứng trượt F' có trục đối xứng d' và vectơ trượt $\vec{v}$. Kí hiệu $Đ$, $Đ'$ lần lượt là phép đối xứng có trục d và d', T

và T' lần lượt là các phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và $\vec{v}'$. Như vậy F là hợp thành của T và $Đ$, F' là hợp thành của $Đ'$ và T'. Suy ra hợp thành của F và F' là hợp thành của bốn phép : T, $Đ$, $Đ'$ và T'.

Vì $d \,//\, d'$ nên hợp thành của $Đ$ và $Đ'$ là một phép tịnh tiến. Vậy hợp thành F và F' là hợp thành của ba phép tịnh tiến và do đó là một phép tịnh tiến.

d) (h.42)

Gọi $Đ$ là phép đối xứng trục, với trục là đường thẳng d, T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, còn F là hợp thành của $Đ$ và T. Ta có thể tìm được hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ sao cho $\vec{v}_1$ song song với d, $\vec{v}_2$ vuông góc với d và $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Nếu ta gọi T_1 và T_2 lần lượt là các phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ thì T là hợp thành của T_2 và T_1. Nhưng vì $\vec{v}_2$ vuông góc với d nên T_2 có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục D_1 và D_2 có trục song song với d.

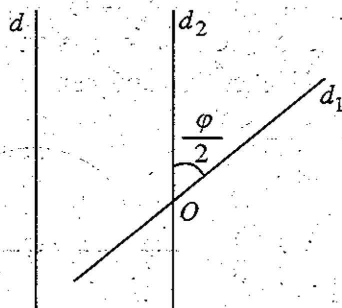


Hình 42

Tóm lại, F là hợp thành của bốn phép $Đ$, $Đ_1$, $Đ_2$ và T_1. Như đã biết, hợp thành của ba phép đối xứng trục $Đ$, $Đ_1$, $Đ_2$ (có trục song song) là phép đối xứng trục $Đ_3$ có trục song song với d. Vậy F là hợp thành của $Đ_3$ và T_1 với vectơ tịnh tiến của T_1 song song với trục đối xứng của $Đ_3$, nên F là phép đối xứng trượt.

e) (h.43)

Giả sử Q là phép quay tâm O và $Đ$ là phép đối xứng qua đường thẳng d, F là hợp thành của Q và $Đ$. Ta có thể xem phép quay Q là hợp thành của hai phép đối xứng $Đ_1$ và $Đ_2$ có các trục đối xứng đi qua O, trong đó trục của $Đ_2$ song song với d. Như vậy F là hợp thành của ba phép đối xứng : $Đ_1$, $Đ_2$ và $Đ$.



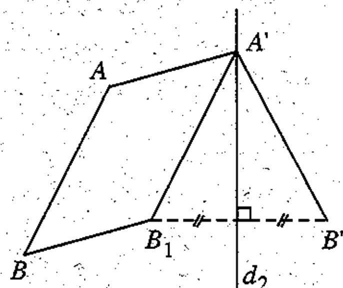
Hình 43

Nhưng hợp thành của $Đ_2$ và $Đ$ (có trục đối xứng song song) là phép tịnh tiến và do đó F là hợp thành của một phép đối xứng và một phép tịnh tiến nên theo câu d), F là phép đối xứng trượt.

g) Suy ra từ câu d) và câu e).

68. (h.44)

Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$. Khi đó T biến A thành A' và biến B thành B_1. Gọi d_2 là đường trung trực của đoạn thẳng B_1B' nếu B_1 khác B', còn nếu B_1 trùng B' thì lấy d_2 là đường thẳng $A'B'$. Hiển nhiên khi đó d_2 đi qua A' và phép đối xứng $Đ_2$ qua đường thẳng d_2 biến A' thành A' và biến B_1 thành B'. Vậy hợp thành F của T và $Đ_2$ sẽ biến A thành A' và biến B thành B'. Suy ra F là phép đối xứng trượt.



Hình 44

69. Lấy hai điểm A, B phân biệt nằm trên a và gọi $A' = F(A)$, $B' = F(B)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AA' và BB'.

Trường hợp hai điểm I và J trùng nhau

Khi đó, phép đối xứng qua I biến điểm $M \in a$ thành điểm $M_1 \in a'$ sao cho

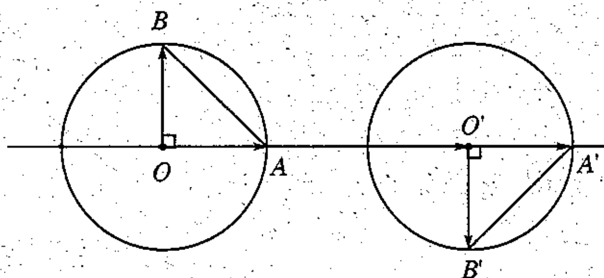
$$M_1A' = MA, M_1B' = MB.$$

Suy ra M_1 trùng $M' = F(M)$. Vậy trung điểm MM' cũng là điểm I.

Trường hợp hai điểm I, J phân biệt

Ta gọi F' là phép đối xứng trượt biến A thành A' và biến B thành B'. Trục của phép đối xứng trượt chính là đường thẳng d đi qua I và J. Khi đó, với mọi điểm $M \in a$ ta có $M' = F'(M) = F(M)$. Vậy trung điểm các đoạn thẳng MM' cũng nằm trên d.

70. (h.45)



Hình 45

a) Vì hai tam giác OAB và $O'A'B'$ bằng nhau nên có phép dời hình F biến O thành O', biến A thành A' và biến B thành B'. Hiển nhiên F cũng biến (O) thành (O').

b) Gọi f là phép đối xứng trượt có trục là OO' và vectơ trượt là $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$ thì rõ ràng f biến O, A, B lần lượt thành O', A', B'. Vậy f trùng với F. Từ đó, suy ra trung điểm của MM' luôn luôn nằm trên đường thẳng OO'.

71. a) Với điểm M bất kì, nếu V biến M thành M' và T biến M' thành M'' thì F biến M thành M''. Bởi vậy F biến điểm I thành điểm I nếu V biến I thành I' và T biến I' thành I, khi đó $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{I'I} = \vec{v}$.

Từ đó, suy ra $\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OI'} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} - k\overrightarrow{OI} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \dfrac{\vec{v}}{1-k}$.

Vậy điểm I hoàn toàn xác định.

b) Với điểm M bất kì, nếu V biến M thành M' thì $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, nếu T biến M' thành M'' thì $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$. Từ đó, suy ra $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM'} - \overrightarrow{IO} = k(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IO})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{OI}(1-k) = k\overrightarrow{IM}. \qquad (*)$$

Nhưng từ biểu thức xác định I ta có $\overrightarrow{OI}(1-k) = \vec{v}$.

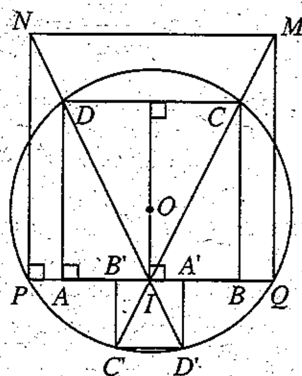
Ngoài ra, vì $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$ nên $\overrightarrow{IM''} - \overrightarrow{IM'} = \vec{v}$ hay $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM''} - \vec{v}$.

Vậy đẳng thức (*) trở thành $\overrightarrow{IM''} = k\overrightarrow{IM}$.

Do đó, phép F biến M thành M'' chính là phép vị tự tâm I tỉ số k.

72. (h.46)

Giả sử đã dựng được hình vuông $ABCD$ thoả mãn điều kiện của bài toán. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PQ thì OI là đường trung trực của PQ nên cũng là đường trung trực của DC và do đó cũng là đường trung trực của AB. Từ đó suy ra, nếu dựng hình vuông $PQMN$ thì có phép vị tự tâm I biến hình vuông $PQMN$ thành hình vuông $ABCD$.



Hình 46

Cách dựng

Dựng hình vuông $PQMN$. Lấy giao điểm C và C' của đường thẳng IM và đường tròn, lấy giao điểm D và D' của IN và đường tròn (ta kí hiệu sao cho hai điểm C, D nằm về một phía đối với đường thẳng PQ). Gọi các điểm B, A, B', A' lần lượt là hình chiếu của các điểm C, D, C', D' trên đường thẳng PQ. Ta được các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$ thoả mãn điều kiện của bài toán.

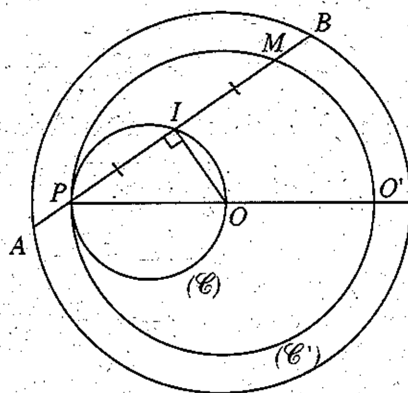
73. Gọi I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{PI} = \dfrac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$,

bởi vậy $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PI}$.

Gọi V là phép vị tự tâm P tỉ số $k = 2$ thì V biến điểm I thành điểm M.

Vì I là trung điểm của AB nên $OI \perp AB$. Suy ra quỹ tích của điểm I là đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính PO.

Vậy quỹ tích của điểm M là đường tròn $(\mathscr{C}')$ ảnh của $(\mathscr{C})$ qua phép vị tự V. Nếu ta lấy O' sao cho $\overrightarrow{PO'} = 2\overrightarrow{PO}$ thì $(\mathscr{C}')$ là đường tròn đường kính PO'.



Hình 47

74. (h.48)

Trên đoạn thẳng AC lấy điểm M sao cho

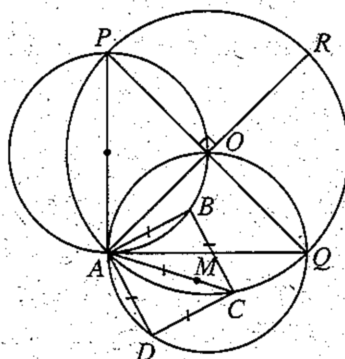
$$AM = AB = AD.$$

Khi đó, ta có $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ngoài ra $(AM, AB) = 45^\circ$ và

$$(AM, AD) = -45^\circ.$$

Suy ra, phép vị tự V tâm A tỉ số $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ biến điểm C thành điểm M và phép quay Q tâm A góc quay 45° biến điểm M thành điểm B. Vậy nếu gọi F là phép hợp thành của V và Q thì F biến C thành B. Vì quỹ tích của C là đường tròn (O), nên quỹ tích của B là ảnh của đường tròn đó qua phép đồng dạng F.



Hình 48

Đường tròn quỹ tích của B có thể xác định như sau :

Gọi AR là đường kính của (O) và PQ là đường kính của (O) vuông góc với AR (ta kí hiệu các điểm P, Q sao cho $(AR, AP) = 45^\circ$). Khi đó dễ thấy rằng phép đồng dạng F biến AR thành AP. Vậy quỹ tích B là đường tròn đường kính AP.

Tương tự, ta được quỹ tích D là đường tròn đường kính AQ.

Bài tập trắc nghiệm chương I

1. (B).	**2.** (B).	**3.** (D).	**4.** (A).	**5.** (C).
6. (D).	**7.** (D).	**8.** (C).	**9.** (D).	**10.** (D).
11. (B).	**12.** (D).	**13.** (D).	**14.** (B).	**15.** (D).
16. (B).	**17.** (D).	**18.** (A).	**19.** (B).	**20.** (B).
21. (C).	**22.** (D).	**23.** (A).		

Chương II

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

A - KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Các tính chất thừa nhận*

a) *Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.*

b) *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.*

c) *Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.*

d) *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.*

e) *Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.*

2. *Định lí*

Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trên mặt phẳng đó.

3. *Các điều kiện xác định mặt phẳng*

Một mặt phẳng được xác định nếu biết một trong ba điều kiện sau đây :

a) *Đi qua ba điểm không thẳng hàng ;*

b) *Đi qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó ;*

c) *Đi qua hai đường thẳng cắt nhau.*

4. *Hình chóp có đáy là một đa giác và các mặt bên đều là tam giác có chung một đỉnh (đỉnh của hình chóp).*

5. *Hình tứ diện ABCD là hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD, trong đó A, B, C, D là bốn điểm không đồng phẳng.*

II - ĐỀ BÀI

1. Chứng minh rằng : Một mặt phẳng và một đường thẳng không nằm trên mặt phẳng đó có không quá một điểm chung.

2. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C nằm ngoài mp(P). Giả sử đoạn thẳng AB và đoạn thẳng BC đều cắt mp(P). Chứng minh rằng đoạn thẳng AC không cắt mp(P).

3. Cho n điểm ($n \geq 4$) trong đó không có bốn điểm nào đồng phẳng. Chứng minh rằng không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng.

4. Cho n điểm ($n \geq 4$) trong đó bất kì bốn điểm nào cũng đồng phẳng. Chứng tỏ rằng n điểm đó đồng phẳng.

5. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hai điểm phân biệt M, N nằm trên đoạn thẳng AB và hai điểm phân biệt I, J nằm trên đoạn thẳng CD. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, I, J không đồng phẳng.

6. Cho hai điểm cố định A, B nằm về hai phía của mp(P) cố định. Gọi M là một điểm chuyển động bất kì trong không gian. Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng MA, MB lần lượt cắt mp(P) tại hai điểm A', B' phân biệt thì đường thẳng $A'B'$ đi qua một điểm cố định.

7. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mp(MNP).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABD).

8. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (NDA).

b) Cho I, J là hai điểm lần lượt nằm trên hai đoạn thẳng AB và AC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (IJD).

9. Cho ba tia Ox, Oy, Oz. Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các cặp điểm A và A', B và B', C và C' sao cho BC cắt $B'C'$ tại M, CA cắt $C'A'$ tại N và AB cắt $A'B'$ tại I. Chứng minh ba điểm M, N, I thẳng hàng.

10. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, K theo thứ tự là hai điểm trong của các tam giác ABC và BCD. Giả sử đường thẳng IK cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Hãy xác định giao điểm J đó.

11. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D ; G là trọng tâm của tam giác ACD. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, AC, AD sao cho

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}.$$

Gọi I, J lần lượt là các giao điểm của đường thẳng MN với BC và MP với BD.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng MG, PI, NJ đồng phẳng.

b) Gọi E, F lần lượt là các trung điểm của CD, NI ; H là giao điểm của MG với BE ; K là giao điểm của GF với mp(BCD). Chứng minh rằng các điểm H, K, I, J thẳng hàng.

12. Cho hình chóp $S.ABCD$. Trên cạnh SC lấy một điểm E không trùng với hai điểm S và C.

a) Tìm giao điểm F của đường thẳng SD với mp(ABE).

b) Giả sử AB không song song với CD, hãy chứng minh ba đường thẳng AB, CD và EF đồng quy.

13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành, O là tâm của đáy ; M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua M, N và B.

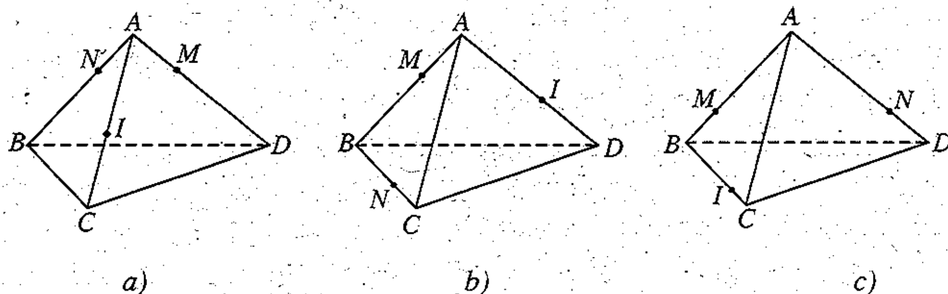
a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng (SAB), (SBC).

b) Tìm giao điểm I của đường thẳng SO với mp(P) và giao điểm K của đường thẳng SD với mp(P).

c) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SDC).

d) Xác định các giao điểm E, F của các đường thẳng DA, DC với mặt phẳng (P) và chứng tỏ rằng ba điểm E, B, F thẳng hàng.

14. Cho tứ diện $ABCD$. Hãy xác định thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (MNI) trong các trường hợp dưới đây (h.49) :



Hình 49

15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$, $AB > CD$). Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB và SC.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mp(AIJ).

c) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mp(AIJ).

16. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$; Δ là một đường thẳng nằm trong mp$(ABCD)$ sao cho Δ song song với BD, M là trung điểm cạnh SA. Hãy xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp(M, Δ) trong các trường hợp sau đây :

a) Δ không cắt cạnh nào của đáy $ABCD$.

b) Δ đi qua điểm C.

c) Δ cắt hai cạnh BC và CD tại hai điểm I và J.

d) Δ cắt hai cạnh AB và AD tại hai điểm I' và J'.

17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng của A qua điểm C. Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng đi qua B, E và một điểm F trong các trường hợp sau đây :

a) F nằm trên đoạn CD và không trùng với C và D.

b) F nằm trong tam giác ACD.

c) F nằm trong đoạn thẳng DD' (D' là trọng tâm của tam giác ABC).

18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi. Mặt phẳng (P) đi qua SA và chia đáy hình chóp thành hai phần có diện tích bằng nhau. Hãy xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(P).

19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AD, J là điểm đối xứng với D qua C, K là điểm đối xứng với D qua B.

a) Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mp(IJK).

b) Tính diện tích thiết diện được xác định ở câu a).

20. Cho tứ diện $ABCD$ thoả mãn điều kiện $AB.CD = AC.BD = AD.BC$. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua mỗi đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện đồng quy tại một điểm.

21. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$. Một mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm tập hợp giao điểm I của ME và NF.

c) Tìm tập hợp giao điểm J của MF và NE.

§2. Hai đường thẳng song song

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.*

2. *Hai đường thẳng được gọi là chéo nhau nếu chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng.*

3. *Định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng*

Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

4. *Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).*

5. *Ba đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của một tứ diện đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn. Điểm G đó gọi là trọng tâm của tứ diện.*

6. *Một mặt phẳng được xác định nếu nó đi qua hai đường thẳng song song.*

II - ĐỀ BÀI

22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Có thể tìm được hai đường thẳng song song cùng cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước.

b) Có thể tìm được hai đường thẳng cắt nhau cùng cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước.

c) Không thể tìm được hai đường thẳng song song hoặc hai đường thẳng cắt nhau cùng cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước.

23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một tứ giác lồi. Chứng minh rằng các cặp đường thẳng sau đây chéo nhau : SA và BC ; SA và CD ; SB và CD ; SB và DA ; SC và AD ; SC và AB ; SD và AB ; SD và BC.

24. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có AD cắt BC. Hãy tìm điểm M nằm trên cạnh SD và điểm N trên cạnh SC sao cho $AM \parallel BN$.

25. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC và SD. Chứng minh rằng :

a) $ME \parallel AC$, $NF \parallel BD$;

b) Ba đường thẳng ME, NF và SO (O là giao điểm của AC và BD) đồng quy ;

c) Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

26. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Gọi M, N, E, F lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD và SDA. Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng ;

b) Tứ giác $MNEF$ là hình thoi ;

c) Ba đường thẳng ME, NF và SO đồng quy (O là giao điểm của AC và BD).

27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và BD ; E là một điểm thuộc cạnh AD khác với A và D.

a) Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mp(IJE).

b) Tìm vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành.

c) Tìm điều kiện của tứ diện $ABCD$ và vị trí của điểm E trên cạnh AD để thiết diện là hình thoi.

28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SAD ; E là trung điểm của CB.

a) Chứng minh rằng $MN \parallel BD$.

b) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp(MNE).

c) Gọi H và L lần lượt là các giao điểm của mp(MNE) với các cạnh SB và SD. Chứng minh rằng $LH \parallel BD$.

29. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng :

a) Các đoạn thẳng đi qua mỗi đỉnh và trọng tâm của mặt đối diện đồng quy tại một điểm G và điểm G chia trong mỗi đoạn thẳng đó theo tỉ lệ 3 : 1 kể từ đỉnh đến trọng tâm của mặt đối diện ;

b) Điểm G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

30. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

a) Hãy xác định điểm $I \in AC$, $J \in DN$ sao cho $IJ // BM$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng IJ theo a.

31. Cho tứ diện $ABCD$ và bốn điểm M, N, E, F lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng :

a) Nếu bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng thì $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = 1$;

b) Nếu $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = 1$ thì bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC, N là trung điểm của OB (O là giao điểm của BD và AC).

a) Tìm giao điểm I của SD và mặt phẳng (AMN).

b) Tính tỉ số $\frac{SI}{ID}$.

§3. Đường thẳng song song với mặt phẳng

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.*

2. *Một đường thẳng (không nằm trên mp(P)) song song với mp(P) khi và chỉ khi nó song song với một đường thẳng nằm trong (P).*

3. *Nếu mp(Q) đi qua đường thẳng a (mà a song song với mp(P)) thì giao tuyến của mp(P) và mp(Q) (nếu có) song song với a.*

4. *Hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.*

5. *Một mặt phẳng được xác định nếu nó đi qua đường thẳng a và song song với đường thẳng b trong đó b và a chéo nhau.*

II - ĐỀ BÀI

33. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$; G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD và ABE. Chứng minh rằng :

a) OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE) ;

b) G_1G_2 song song với mặt phẳng (CEF).

34. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm thuộc cạnh CD không trùng với C và D. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với BC.

a) Hãy xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mp(P).

b) Xác định vị trí của điểm N trên CD sao cho thiết diện là một hình bình hành.

35. Cho tứ diện $ABCD$. Hãy xác định thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau :

a) Mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm G của tứ diện, qua điểm E thuộc cạnh BC và song song với AD.

b) Đi qua trọng tâm của tứ diện và song song với BC và AD.

36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC ; (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(P).

b) Gọi E và F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD. Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF với tam giác SCD.

c) Gọi K là giao điểm của ME với CB, J là giao điểm của MF và CD. Hãy chứng minh ba điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}$.

37. Cho hình chóp $S.ABCD$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'.

a) Tìm điều kiện của mp(P) để tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thang.

b) Tìm điều kiện của mp(P) để tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

38. Cho tứ diện $ABCD$. Trọng tâm G của tam giác ABD, điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng IG song song với mặt phẳng (ACD).

39. Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng (P) di động luôn song song với AB và CD lần lượt cắt các cạnh AC, AD, BD, BC tại M, N, E, F.

a) Chứng minh rằng tứ giác $MNEF$ là một hình bình hành.

b) Tìm tập hợp tâm I của hình bình hành $MNEF$.

§4. Hai mặt phẳng song song

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Hai mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.*

2. *Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).*

3. *Qúa một điểm ngoài một mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.*

4. *Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).*

5. *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.*

6. *Định lí Ta-lét : Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

7. *Định lí Ta-lét đảo : Giả sử trên hai đường thẳng a và a' chéo nhau lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

8. *Hình lăng trụ có hai đáy là hai đa giác nằm trên hai mặt phẳng song song ; các mặt bên đều là hình bình hành ; các cạnh bên bằng nhau và đôi một song song.*

9. *Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành ; bốn đường chéo của hình hộp đồng quy tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.*

10. *Hình chóp cụt có hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song ; các mặt bên đều là hình thang ; các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.*

II - ĐỀ BÀI

40. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Nếu một đường thẳng nằm trên một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mặt phẳng còn lại.

b) Nếu một đường thẳng nằm trên một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng còn lại.

c) Các mặt đối diện của một hình hộp nằm trên những mặt phẳng song song.

41. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) ; hai đường thẳng song song a và b. Đường thẳng a lần lượt cắt (P), (Q) tại A, A' ; đường thẳng b lần lượt cắt (P), (Q) tại B, B'. Chứng minh rằng hai đoạn thẳng AA' và BB' bằng nhau.

42. Cho một mặt phẳng (P) và một điểm A nằm ngoài (P). Chứng minh rằng tất cả những đường thẳng đi qua A và song song với (P) đều cùng nằm trong một mặt phẳng (Q) song song với (P).

43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một tứ giác lồi. M là trung điểm của cạnh bên SA, N là trung điểm của cạnh bên SC.

a) Xác định các thiết diện của hình chóp khi cắt bởi các mặt phẳng lần lượt qua M, N và song song với mp(SBD).

b) Gọi I, J là giao điểm của hai mặt phẳng nói trên với AC. Chứng minh rằng $IJ = \frac{1}{2}AC$.

44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành khi và chỉ khi mặt phẳng (P) song song với mp$(ABCD)$.

45. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCA.

a) Chứng minh rằng $(IJK) // (ABC)$.

b) Tìm tập hợp các điểm M nằm trong hình chóp $S.ABC$ sao cho KM song song với mp(ABC).

46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB // CD)$. Điểm M thuộc cạnh BC không trùng với B và C.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua M và song song với mp(SAB). Thiết diện là hình gì ?

b) Gọi E và F lần lượt là giao điểm của mp(P) với SD và SC. Chứng minh rằng giao điểm I của NE và MF chạy trên một đường thẳng cố định.

47. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Một mặt phẳng qua IJ cắt các cạnh AD và BC lần lượt tại N và M.

a) Cho trước điểm M, nêu cách dựng điểm N.

b) Gọi K là giao điểm của MN và IJ. Chứng minh rằng K là trung điểm của MN.

48. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai cạnh AB và CD. Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

49. Hãy dùng định lí Ta-lét để giải bài tập 31 (chương II).

50. Cho tứ diện $ABCD$. Hãy dựng một hình hộp ngoại tiếp tứ diện đó (tức là dựng một hình hộp sao cho mỗi cạnh của tứ diện là đường chéo của một mặt của hình hộp).

51. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh bằng a. Các điểm M, N lần lượt nằm trên AD', DB sao cho $AM = DN = x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$.

a) Chứng minh rằng khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh rằng khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

52. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O_1 là tâm của hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$; K là trung điểm của CD ; E là trung điểm của BO_1.

a) Chứng minh rằng E nằm trên mp(ACB_1).

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua điểm K và song song với mặt phẳng (EAC).

53. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trên đường thẳng BA lấy một điểm M sao cho A nằm giữa B và M, $MA = \frac{1}{2}AB$.

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua M, B' và trung điểm E của AC.

b) Tính tỉ số $\frac{BD}{CD}$ $(D = BC \cap \text{mp}(MB'E))$.

54. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm của các hình bình hành $ACC'A'$, $BCC'B'$, $ABB'A'$.

a) Chứng minh rằng : $IJ \parallel (ABB'A')$, $JK \parallel (ACC'A')$, $IK \parallel (BCC'B')$.

b) Ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng quy tại một điểm O.

c) Mặt phẳng (IJK) song song với mặt đáy của hình lăng trụ.

d) Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng ba điểm G, O, G' thẳng hàng.

55. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M thuộc cạnh AD, điểm N thuộc cạnh $D'C'$ sao cho $AM : MD = D'N : NC'$.

a) Chứng minh rằng MN song song với $(C'BD)$.

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp(P) qua MN và song song với mp$(C'BD)$.

56. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi P, Q, R, S lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$.

a) Chứng minh rằng RQ song song với $(ABCD)$, $(PQRS)$ song song $(ABCD)$.

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (AQR).

c) Gọi M là giao điểm của cạnh CC' với mp(AQR). Tính tỉ số $\frac{MC}{MC'}$.

57. Cho hình chóp cụt tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$, có các cạnh bên là AA', BB', CC', DD' và có đáy lớn $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AD' và BC', CB' và DA', BA' và CD', AB' và DC'. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

§5. Phép chiếu song song

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Phép chiếu song song lên một mặt phẳng (P) theo phương l (cắt mặt phẳng (P)) là phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mặt phẳng (P) sao cho MM' song song hoặc trùng với l.*

2. *Phép chiếu song song theo phương l*

a) *Bảo toàn sự thẳng hàng và thứ tự thẳng hàng của các điểm.*

b) *Biến hai đường thẳng song song (nhưng không song song với l) thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.*

c) *Bảo toàn tỉ số của hai đoạn thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.*

3. *Hình biểu diễn của một hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó lên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.*

4. *Hình biểu diễn của tam giác cân, tam giác vuông, tam giác đều, thường là một tam giác bất kì.*

5. Hình biểu diễn của hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông thường là một hình bình hành.

6. Hình biểu diễn của một hình thang thường là một hình thang.

7. Hình biểu diễn của đường tròn thường là đường elip hoặc đường tròn.

II - ĐỀ BÀI

58. Cho tam giác ABC. Hãy chọn mặt phẳng chiếu (P) và phương chiếu l để hình chiếu của tam giác ABC trên (P) là :

a) Một tam giác cân ;

b) Một tam giác đều ;

c) Một tam giác vuông.

59. Vẽ hình chiếu của tứ diện $ABCD$ lên một mặt phẳng (P) theo phương chiếu AB (AB không song song với (P)).

60. Vẽ hình chiếu của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ lên một mặt phẳng (P) theo phương chiếu AC_1 (AC_1 không song song với (P)).

61. Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện đều.

62. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', BC lần lượt lấy các điểm M và N không trùng với các đỉnh của hình hộp. Trong hình bình hành $A'B'C'D'$ lấy một điểm P. Hãy xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp(MNP).

63. Cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Trên d đặt hai đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau AB và BC (B ở giữa A và C) ; trên d' đặt hai đoạn thẳng liên tiếp cũng bằng nhau $A'B'$ và $B'C'$ (B' ở giữa A' và C'). Chứng minh rằng $AA' + CC' > 2BB'$.

64. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC'.

a) Xác định đường thẳng Δ qua M cắt AN và cắt $A'B$.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và $A'B$. Hãy tìm tỉ số $\frac{IM}{IJ}$.

65. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a) Hãy xác định đường thẳng Δ cắt cả hai đường thẳng AC_1 và BA_1 đồng thời song song với B_1D_1.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AC_1 và BA_1. Tính tỉ số $\frac{AI}{AC_1}$.

66. Hãy xác định thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng qua ba điểm M, N, P tương ứng là ba điểm trong của ba mặt bên :

a) $(ABCD)$, $(ABB'A')$, $(ADD'A')$;

b) $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$, $(ABB'A')$.

67. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau không cùng song song với một mặt phẳng và một điểm G không nằm trên bất cứ đường nào trong ba đường thẳng đó. Hãy dựng tam giác có các đỉnh thứ tự nằm trên ba đường thẳng đã cho và nhận G làm trọng tâm.

 Bài tập ôn tập chương II

68. Chứng minh rằng nếu n đường thẳng ($n \geq 3$) đôi một cắt nhau và không đồng phẳng thì chúng đồng quy.

69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$, $AB > CD$). Gọi E là giao điểm của AD và BC ; M là trung điểm của AB ; G là trọng tâm của tam giác ECD.

a) Chứng minh rằng các điểm S, E, M, G cùng thuộc một mặt phẳng và mặt phẳng này cắt cả hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) theo cùng một đường thẳng Δ.

b) Gọi C_1 và D_1 là hai điểm lần lượt thuộc các cạnh SC, SD sao cho AD_1 và BC_1 cắt nhau tại K. Chứng minh các điểm S, K, E thẳng hàng và giao điểm O_1 của AC_1 với BD_1 thuộc Δ.

70. Trong mp(P), cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O. Hai điểm A, B nằm ngoài mp(P) và đường thẳng AB cắt mp(P) tại C sao cho $C \notin a$, $C \notin b$. Một mặt phẳng (Q) thay đổi luôn đi qua AB và cắt hai đường thẳng a, b lần lượt tại A_1 và B_1.

a) Chứng minh rằng đường thẳng A_1B_1 luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi I là giao điểm của AA_1 và BB_1, J là giao điểm của AB_1 và BA_1. Chứng minh rằng mỗi điểm I và J chạy trên một đường thẳng cố định.

c) Chứng minh rằng đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định.

71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M, I, J, O lần lượt là trung điểm của SD, AB, CD, IJ.

a) Chứng minh rằng nếu G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC thì $G_1G_2 \parallel MJ$.

b) Chứng minh rằng tám đường thẳng mà mỗi đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh hình chóp và trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh hình chóp không nằm trên cạnh nói trên đồng quy tại một điểm G.

c) Chứng minh rằng điểm G nằm trên đoạn thẳng SO và $GS = 4GO$.

72. Cho hình chóp $S.ABC$ và một điểm M nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M lần lượt song song với các đường thẳng SA, SB, SC cắt các mặt phẳng $(SBC), (SCA), (SAB)$ tại A', B', C'.

a) Gọi N là giao điểm của SA' với BC. Chứng minh rằng các điểm A, M, N thẳng hàng và từ đó suy ra cách dựng điểm A'.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{MA'}{SA}$;

c) Chứng minh rằng $\dfrac{MA'}{SA} + \dfrac{MB'}{SB} + \dfrac{MC'}{SC} = 1$.

73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại A', B', C'. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; I là giao điểm của $A'C'$ và SO.

a) Tìm giao điểm D' của mp(P) với cạnh SD.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{2SO}{SI}$.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$.

74. Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng (α) song song với cả AC và BD cắt các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại các điểm P, Q, R, S.

a) Chứng minh rằng tứ giác $PQRS$ là hình bình hành.

b) Xác định vị trí của điểm P trên cạnh AB để tứ giác $PQRS$ là hình thoi.

75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD ; M là trung điểm của cạnh SA.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua M, song song với SO và BC.

b) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (Q) qua O, song song với BM và SD.

76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang (AD // BC, $AD > BC$). Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA.

a) Chứng minh rằng : MN // (SBC) ; (MEN) // (SBC).

b) Trong tam giác SAD vẽ EF // AD ($F \in SD$). Chứng minh rằng F là giao điểm của mặt phẳng (MNE) với SD. Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(MNE) là hình gì ?

c) Chứng minh rằng SC // (MNE). Đường thẳng AF có song song với mp(SBC) hay không ?

d) Cho M, N là hai điểm cố định lần lượt nằm trên các cạnh AB, CD sao cho MN // AD và E, F là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh SA, SD sao cho EF // AD. Gọi I là giao điểm của ME và NF thì I di động trên đường nào ?

77. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a) Chứng minh rằng đường chéo B_1D cắt mp(A_1BC_1) tại điểm G sao cho $B_1G = \frac{1}{2}GD$ và G là trọng tâm tam giác A_1BC_1.

b) Chứng minh rằng (D_1AC) // (BA_1C_1) và trọng tâm G' của tam giác D_1AC cũng nằm trên B_1D và $B_1G' = \frac{2}{3}B_1D$.

c) Gọi P, Q, R lần lượt là các điểm đối xứng của điểm B_1 qua A, D_1 và C. Chứng minh rằng (PQR) // (BA_1C_1).

d) Chứng minh rằng D là trọng tâm tứ diện B_1PQR.

Bài tập trắc nghiệm chương II

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì đồng quy ;

(B) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì đồng phẳng ;

(C) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không đồng phẳng thì đồng quy ;

(D) Ba đường thẳng đồng quy thì đồng phẳng.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng ;

(B) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng ;

(C) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì cả ba đường thẳng đó đồng phẳng ;

(D) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng chéo nhau thì ba đường thẳng đó đồng phẳng.

3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau ;

(B) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau ;

(C) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau ;

(D) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

4. Cho hai đường thẳng song song a và b. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

(A) Nếu mặt phẳng (P) cắt a thì cũng cắt b ;

(B) Nếu mặt phẳng (P) song song với a thì cũng song song với b ;

(C) Nếu mặt phẳng (P) song song với a thì mặt phẳng (P) hoặc song song với b hoặc mặt phẳng (P) chứa b ;

(D) Nếu mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a thì cũng có thể chứa đường thẳng b.

5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

(A) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau ;

(B) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cắt mặt phẳng còn lại ;

(C) Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cắt mặt phẳng còn lại ;

(D) Nếu một đường thẳng song song với một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mặt phẳng còn lại.

6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì song song với nhau ;

(B) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau ;

(C) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau ;

(D) Các mệnh đề trên đều sai.

7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA, AC và BD. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Hai đường thẳng RS và PQ cắt nhau ;

(B) Hai đường thẳng NR và PQ song song với nhau ;

(C) Hai đường thẳng MN và PQ song song với nhau ;

(D) Hai đường thẳng RS và MP chéo nhau.

8. Với giả thiết như bài 7, hãy cho biết trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Ba đường thẳng MQ, RS, NP đôi một song song ;

(B) Ba đường thẳng MP, NQ, RS đồng quy ;

(C) Ba đường thẳng NQ, SP, RS đồng phẳng ;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

9. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Hai đường thẳng p và q lần lượt nằm trong (P) và (Q). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) p và q cắt nhau ;

(B) p và q chéo nhau ;

(C) p và q song song ;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

10. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD. Diện tích của thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (BGG') là

(A) $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{3}$; (B) $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{6}$;

(C) $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{8}$; (D) $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{16}$.

11. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Kết quả nào sau đây là đúng ?

(A) AD // (BEF) ;
(B) (AFD) // (BEC) ;
(C) (ABD) // (EFC) ;
(D) EC // (ABF).

12. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Một mặt phẳng (P) thay đổi qua A' và song song với AC luôn đi qua một đường thẳng cố định là

(A) Đường thẳng $A'B'$;
(B) Đường thẳng $A'D'$;
(C) Đường thẳng $A'C'$;
(D) Đường thẳng $A'B$.

13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Một mặt phẳng (P) đồng thời song song với AC và SB lần lượt cắt các đoạn thẳng SA, AB, BC, SC, SD và BD tại M, N, E, F, I, J. Khi đó ta có

(A) Ba đường thẳng NE, AC, MF đôi một cắt nhau ;

(B) Ba đường thẳng NE, AC, MF đôi một song song ;

(C) Ba đường thẳng NE, AC, MF đồng phẳng ;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

14. Với giả thiết của bài 13, ta có

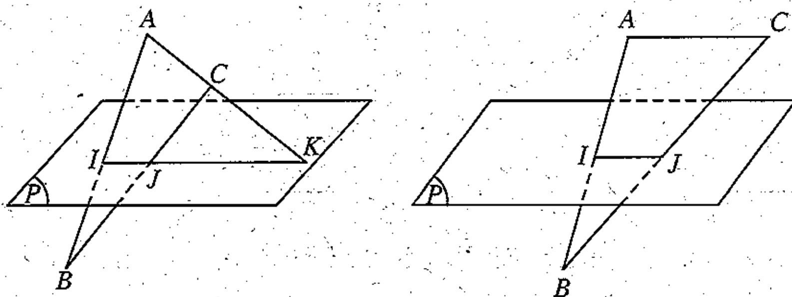
(A) MN // (SCD) ;
(B) EF // (SAD) ;
(C) NF // (SAD) ;
(D) IJ // (SAB).

B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

1. Giả sử (P) là một mặt phẳng và a là một đường thẳng sao cho a không nằm trên (P). Nếu (P) và a có ít nhất hai điểm chung phân biệt thì theo định lí mặt phẳng (P) sẽ chứa a (trái với giả thiết).

2. Giả sử $I = AB \cap \text{mp}(P)$, $J = BC \cap \text{mp}(P)$.



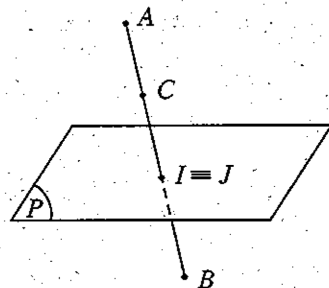
Hình 50

Trường hợp ba điểm A, B, C không thẳng hàng (h.50)

Xét mp(ABC) và đường thẳng IJ ta có $IJ \subset (ABC)$. Theo giả thiết A, B nằm khác phía đối với đường thẳng IJ và B, C cũng nằm khác phía đối với đường thẳng IJ. Vậy A, C nằm về một phía của đường thẳng IJ, nghĩa là đoạn thẳng AC không cắt mp(P).

Trường hợp ba điểm A, B, C thẳng hàng (h.51)

Khi đó, điểm J trùng với điểm I ; hai điểm A, C nằm về một phía đối với điểm J trên đường thẳng qua A, B, C, nghĩa là A và C nằm về một phía đối với mp(P). Vậy đoạn thẳng AC không cắt mặt phẳng (P).



Hình 51

3. Giả sử có ba điểm A, B, C của n điểm đã cho thẳng hàng. Khi đó bốn điểm A, B, C, D nào cũng đồng phẳng (mâu thuẫn với giả thiết). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

4. Giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ là n điểm đã cho.

Nếu chúng thẳng hàng thì rõ ràng chúng đồng phẳng.

Nếu chúng không thẳng hàng thì tồn tại ba điểm không thẳng hàng (chẳng hạn A_1, A_2, A_3). Qua ba điểm đó ta có mp($A_1A_2A_3$). Khi đó vì bốn điểm nào của n điểm đã cho cũng đồng phẳng nên các điểm A_i, $i \geq 4$ đều nằm trong mp($A_1A_2A_3$).

5. Giả sử có mp(P) chứa bốn điểm M, N, I, J. Khi đó

$$M \in (P), N \in (P) \Rightarrow MN \subset (P) \Rightarrow A \in (P), B \in (P)$$

và

$$I \in (P), J \in (P) \Rightarrow IJ \subset (P) \Rightarrow C \in (P), D \in (P)$$

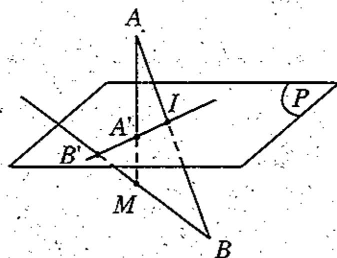
nên A, B, C, D đều thuộc (P) (trái giả thiết). Suy ra điều phải chứng minh.

6. (h.52)

Vì A và B nằm về hai phía đối với mp(P) nên đường thẳng AB cắt (P) tại một điểm I. Khi đó I cố định.

Nếu M nằm trên đường thẳng AB thì $A' \equiv B' \equiv I$.

Nếu M không nằm trên đường thẳng AB thì có mp(MAB). Khi đó



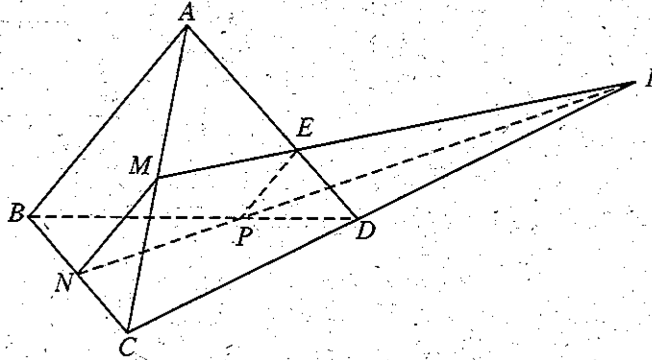
Hình 52

$$\left.\begin{array}{l} A' \in AM,\ AM \subset \text{mp}(MAB) \Rightarrow A' \in \text{mp}(MAB) \\ B' \in BM,\ BM \subset \text{mp}(MAB) \Rightarrow B' \in \text{mp}(MAB) \\ I \in AB,\ AB \subset \text{mp}(MAB) \Rightarrow I \in \text{mp}(MAB). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Mặt khác, các điểm A', B', I đều thuộc mp(P). (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A', B', I thẳng hàng, tức là đường thẳng $A'B'$ đi qua điểm cố định I.

7. (h.53)



Hình 53

a) Xét mp(BCD), ta có $\dfrac{BN}{BC} \neq \dfrac{BP}{BD}$. Suy ra đường thẳng NP cắt đường thẳng CD tại một điểm I. Điểm I thuộc CD và cũng thuộc mp(MNP) nên I chính là giao điểm của CD và mp(MNP).

b) Gọi E là giao điểm của đường thẳng MI và AD. Khi đó, rõ ràng E và P là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MNP) và (ABD).

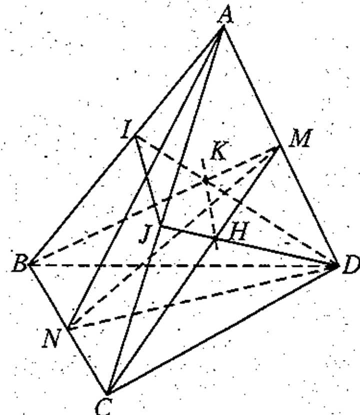
Vậy $\quad (MNP) \cap (ABD) = EP.$

8. (h.54)

a) Ta có $(MBC) \cap (NAD) = MN.$

b) Gọi K là giao điểm của MB với ID và H là giao điểm của MC với DJ thì rõ ràng K và H là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MBC) và (IJD) nên

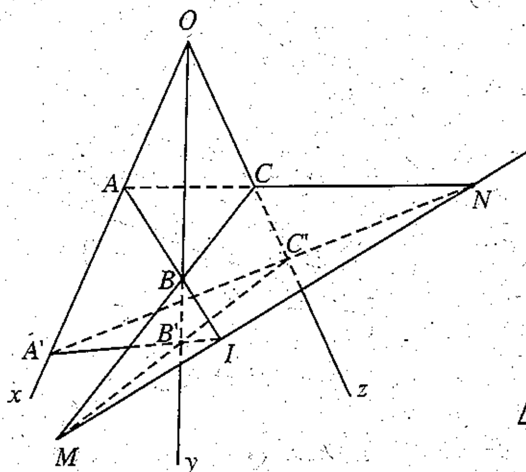
$$(MBC) \cap (IJD) = KH.$$



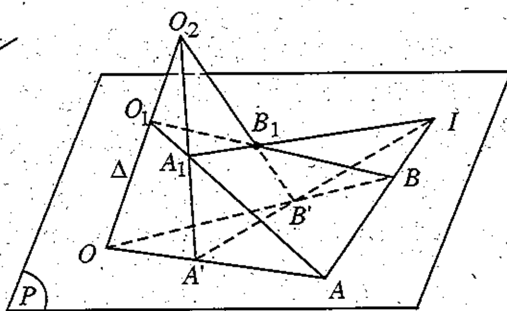
Hình 54

9. *Trường hợp Ox, Oy, Oz không đồng phẳng* (h.55)

Dễ thấy M, N, I là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (ABC) và ($A'B'C'$) nên chúng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đó. Vậy ba điểm M, N, I thẳng hàng.



Hình 55



Hình 56

Trường hợp Ox, Oy, Oz thuộc một mp(P) (h.56)

Qua O ta dựng một đường thẳng Δ không nằm trên mp(P). Trên Δ lấy các điểm O_1, O_2. Gọi A_1 là giao điểm của O_1A với O_2A', B_1 là giao điểm của O_1B với O_2B'. Dễ chứng minh A_1B_1, $A'B'$, AB đồng quy tại I. Tương tự, ta dựng điểm C_1 là giao điểm của O_1C với O_2C'. Hai tam giác $A_1B_1C_1$ và ABC không nằm trong một mặt phẳng, nên theo câu a) ta được ba điểm M, N, I thẳng hàng.

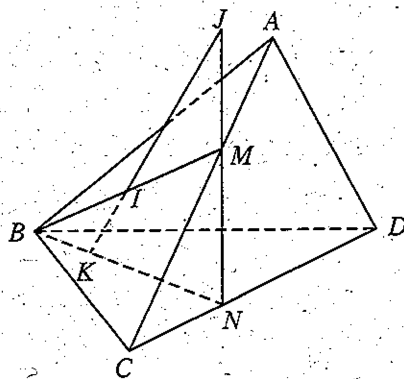
10. (h.57)

Ta chọn một mặt phẳng chứa IK và tìm giao tuyến của mặt phẳng này với mp(ACD) thì giao điểm của giao tuyến đó với IK chính là điểm J cần tìm.

Xét mp(BIK), gọi M, N lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng BI với CA và BK với CD. Khi đó

$$(BIK) \cap (ACD) = MN.$$

Từ đó J chính là giao điểm của đường thẳng MN với đường thẳng KI.



Hình 57

11. (h.58)

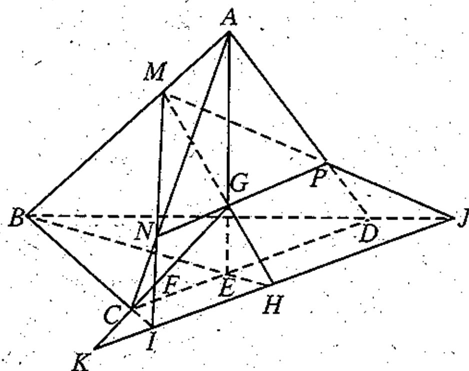
a) Ta có

$JN \subset mp(MNP)$,

$IP \subset mp(MNP)$.

Vì $\dfrac{CN}{NA} = \dfrac{EG}{GA} = \dfrac{DP}{PA} = \dfrac{1}{2}$

nên trong mp(ACD) các điểm N, G, P nằm trên một đường thẳng song song với CD. Từ đó G thuộc NP, suy ra $MG \subset mp(MNP)$. Vậy ba đường thẳng MG, JN, IP đều thuộc mp(MNP).



Hình 58

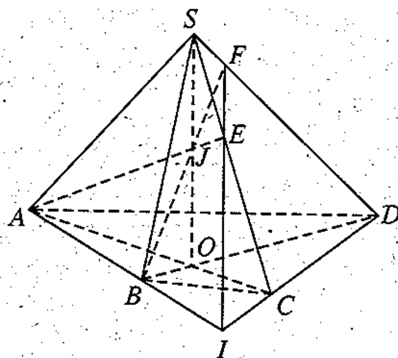
b) Vì H là giao điểm của MG với BE nên H thuộc mp(MNP) và mp(BCD). Vì K là giao điểm của GF với mp(BCD) nên K thuộc mp(BCD) và mp(MNP). Mặt khác mp(MNP) và mp(BCD) cắt nhau theo giao tuyến IJ. Vậy các điểm H và K phải thuộc đường thẳng IJ, tức là bốn điểm I, J, H, K thẳng hàng.

12. (h.59)

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD ; J là giao điểm của SO và AE. Hai mặt phẳng (SBD) và (ABE) có hai điểm chung là B và J. Do đó $(SBD) \cap (ABE) = BJ$.

Gọi F là giao điểm của BJ và SD thì F chính là giao điểm của đường thẳng SD với mp(ABE).

b) Gọi I là giao điểm của AB và CD. Khi đó ba điểm I, E, F cùng thuộc hai mặt phẳng (ABE) và (SCD) nên chúng thẳng hàng.

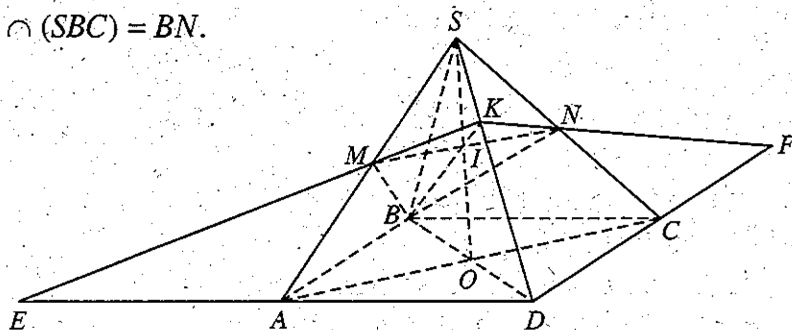


Hình 59

13. (h.60)

a) $(P) \cap (SAB) = BM$,

$(P) \cap (SBC) = BN$.



Hình 60

b) Xét mp(SAC), gọi I là giao điểm của SO và MN thì I là giao điểm của SO và mp(P). Gọi K là giao điểm của đường thẳng BI với SD thì K là giao điểm của SD và (P).

c) $(P) \cap (SAD) = MK$,

$(P) \cap (SDC) = KN$.

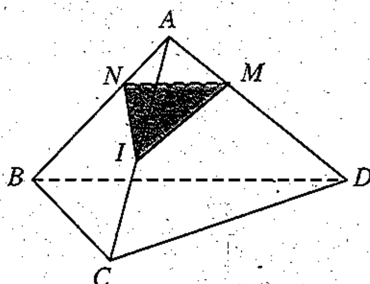
d) Trong mp(SAD) gọi E là giao điểm của đường thẳng MK với đường thẳng AD thì E là giao điểm của (P) và AD.

Tương tự giao điểm F của KN và DC là giao điểm của (P) và DC.

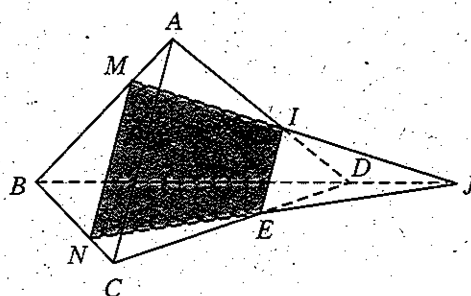
Rõ ràng B, E, F là ba điểm chung của hai mặt phẳng (P) và mp($ABCD$) nên chúng phải thẳng hàng.

14. a) (h.61)

Thiết diện là tam giác MNI.



Hình 61



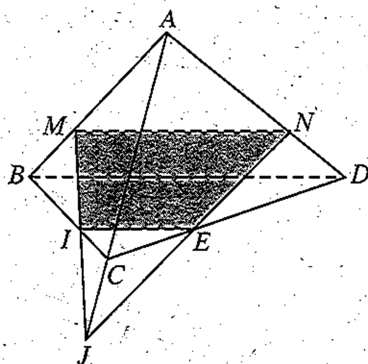
Hình 62

b) (h.62)

Kéo dài MI cắt BD tại J. Nối J với N cắt CD tại E. Thiết diện là tứ giác $MIEN$.

c) (h.63)

Kéo dài MI cắt AC tại J. Nối J và N cắt CD tại E. Thiết diện là tứ giác $MIEN$.



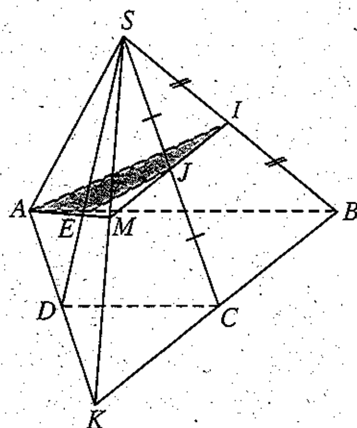
Hình 63

15. a) (h.64)

Gọi K là giao điểm của AD và BC ; khi đó hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có hai điểm chung S và K. Vậy giao tuyến của chúng là đường thẳng SK.

b) Gọi M là giao điểm của IJ và SK. Khi đó $(SAD) \cap (AIJ) = AM$. Gọi E là giao điểm của AM và SD thì E chính là giao điểm của SD với mp(AIJ).

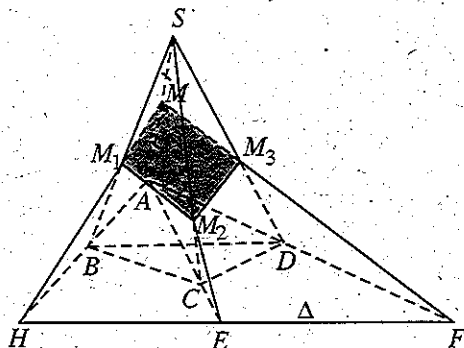
c) Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(AIJ) là tứ giác $AIJE$.



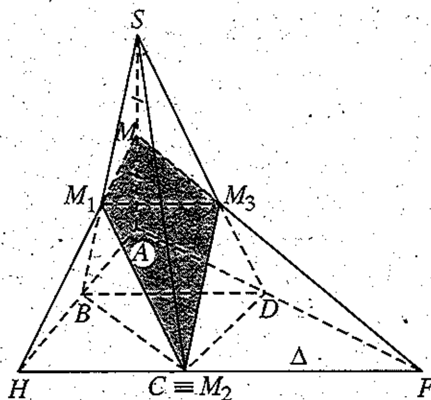
Hình 64

16. a) (h.65)

Gọi H, E, F lần lượt là các giao điểm của Δ với các đường thẳng AB, AC và AD. Khi đó các cạnh bên SB, SC, SD của hình chóp lần lượt cắt các đường thẳng MH, ME và MF tại M_1, M_2, M_3. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(M, Δ) trong trường hợp này là tứ giác $MM_1M_2M_3$.



Hình 65



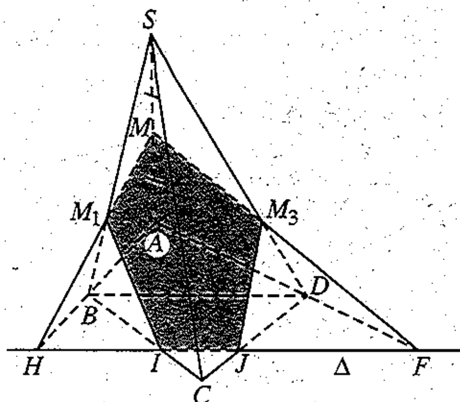
Hình 66

b) (h.66)

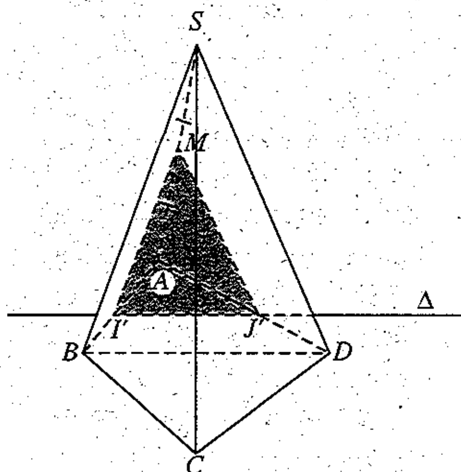
Thiết diện là tứ giác MM_1CM_3.

c) (h.67)

Thiết diện là ngũ giác MM_1IJM_3.



Hình 67



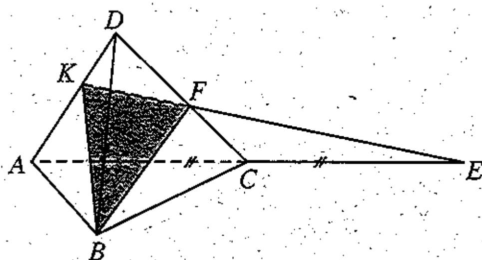
Hình 68

d) (h.68)

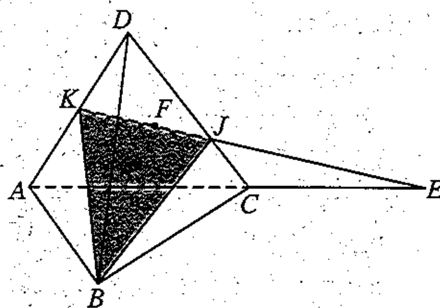
Thiết diện là tam giác $MI'J'$.

17. a) (h.69)

Trong mp(ACD), kéo dài EF cắt AD tại K. Khi đó thiết diện cần tìm là tam giác BFK.



Hình 69



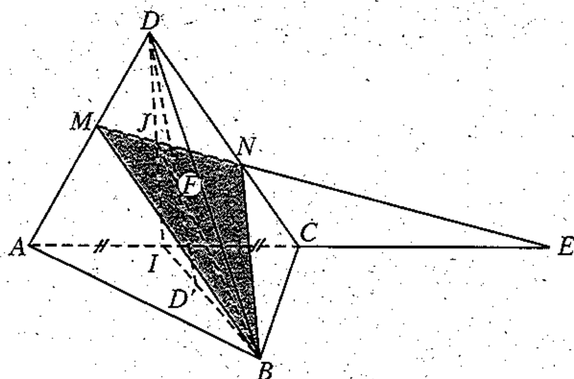
Hình 70

b) (h.70)

Trong mp(ACD), kéo dài EF cắt AD và DC lần lượt tại K và J. Khi đó thiết diện cần tìm là tam giác BKJ.

c) (h.71)

Gọi I là giao điểm của BD' và AC (I là trung điểm của AC). Xét mp(BDI) ta có đường thẳng BF cắt DI tại một điểm J. Khi đó J là điểm chung của hai mặt phẳng (BEF) và (DAC). Vậy (BEF) cắt (DAC) theo đường thẳng EJ. Đường thẳng này cắt AD và DC tại M và N. Vậy thiết diện cần tìm là tam giác BMN.

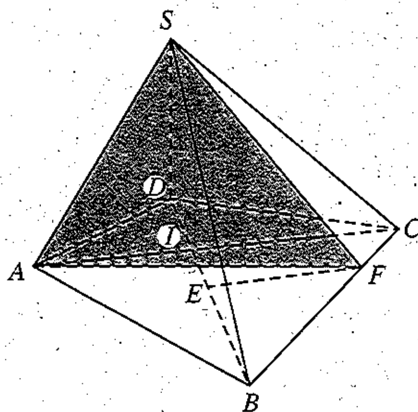


Hình 71

18. (h.72)

Gọi E là trung điểm của BD. Trong mp($ABCD$), từ E kẻ đường thẳng EF song song với AC. Đường thẳng này cắt một trong hai cạnh CB hoặc CD. Chẳng hạn cắt cạnh BC tại F. Tam giác SAF chính là thiết diện cần tìm.

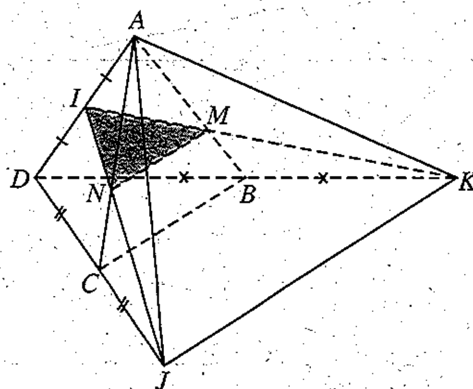
Trong trường hợp E trùng với giao điểm I của AC và BD thì EF trùng với IC. Dễ chứng minh rằng đường thẳng AF chia tứ giác $ABCD$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.



Hình 72

19. (h.73)

a) Nối I và J cắt AC tại N. Nối I và K cắt AB tại M. Tam giác IMN là thiết diện cần tìm.



Hình 73

b) Dễ thấy M là trọng tâm tam giác ADK, N là trọng tâm tam giác ADJ. Từ đó, ta có

$$AN = \frac{2}{3}AC,\ AM = \frac{2}{3}AB.$$

Suy ra $AN = AM = \frac{2}{3}a$ và $MN // CB$. Do đó $MN = \frac{2}{3}CB$ hay $MN = \frac{2}{3}a$.

Xét tam giác AIM. Ta có

$$IM^2 = AI^2 + AM^2 - 2AI.AM.\cos 60^\circ$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{4}{9}a^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{36}a^2$$

$$\Rightarrow IM = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

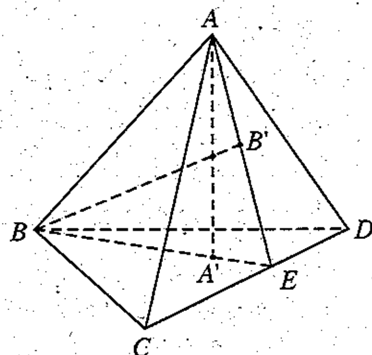
Tương tự, ta có $IN = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Vậy theo công thức Hê-rông, ta có

$$S_{IMN} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}+\frac{2}{6}a\right)\cdot\frac{2}{6}a\cdot\frac{2}{6}a\cdot\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}-\frac{2}{6}a\right)} = \frac{a^2}{6}.$$

20. (h.74)

Vì bốn đỉnh của tứ diện không đồng phẳng nên bốn đường thẳng (lần lượt đi qua mỗi đỉnh của tứ diện và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện) cũng không đồng phẳng. Để chứng minh bốn đường thẳng đó đồng quy ta chỉ cần chứng minh chúng đôi một cắt nhau.



Hình 74

Gọi A', B' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BCD và tam giác ACD. Gọi E là giao điểm của BA' với CD. Theo tính chất đường phân giác, ta có

$$\frac{EC}{ED} = \frac{BC}{BD}.$$

Từ giả thiết $AC.BD = AD.BC \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD}.$

Suy ra AE là đường phân giác của góc CAD, do đó tâm B' của đường tròn nội tiếp tam giác ACD phải thuộc AE. Hai đường thẳng AA' và BB' nằm trong mp(ABE), dễ thấy chúng không song song nên chúng cắt nhau.

Chứng minh tương tự, hai đường thẳng bất kì trong bốn đường thẳng nói trên cắt nhau. Vậy bốn đường thẳng đó không đồng phẳng và đôi một cắt nhau, nên chúng đồng quy.

21. (h.75)

a) Gọi K là giao điểm của MN và BC thì K cố định và K là một điểm chung của mp(P) với mp(BCD). Mặt khác

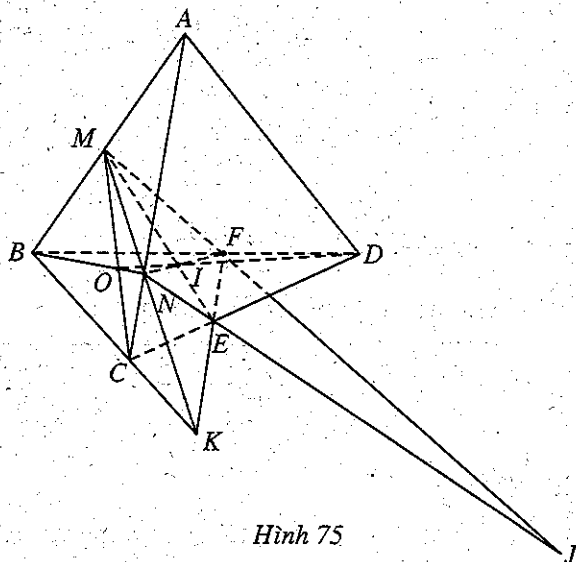
mp(P) $\cap$ mp(BCD) = EF.

Vậy K phải thuộc EF, nên EF luôn qua điểm cố định K.

b) Ta có I là giao điểm của ME và NF. Vậy

$I \in ME, ME \subset (MCD) \Rightarrow I \in (MCD)$

và $I \in NF$, $NF \subset (NBD) \Rightarrow I \in (NBD)$.



Hình 75

Từ đó, suy ra I thuộc giao tuyến OD của (MCD) và (NBD).

Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và I chạy đến O.

Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và I cũng chạy đến D.

Vậy tập hợp các điểm I là đoạn thẳng OD.

Học sinh tự chứng minh phần đảo.

c) J là giao điểm của MF và NE. Từ đó dễ thấy J thuộc cả hai mặt phẳng (ABD) và (ACD). Vậy J phải thuộc giao tuyến AD của hai mặt phẳng (ABD) và (ACD).

Lí luận tương tự như câu a) ta thấy tập hợp các điểm J là đường thẳng AD trừ các điểm trong của đoạn AD.

§2. Hai đường thẳng song song

22. Mệnh đề c) đúng.

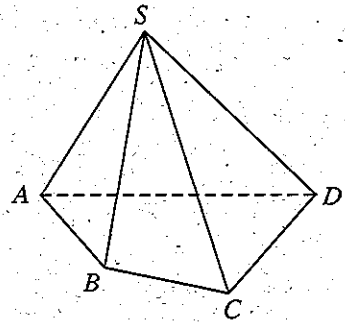
23. (h.76)

Chứng minh SA và BC chéo nhau.

Giả sử SA và BC không chéo nhau, tức là chúng đồng phẳng. Khi đó S thuộc mp($ABCD$), điều đó mâu thuẫn với giả thiết S.$ABCD$ là hình chóp.

Vậy SA và BC chéo nhau.

Các cặp đường thẳng còn lại chứng minh tương tự.



Hình 76

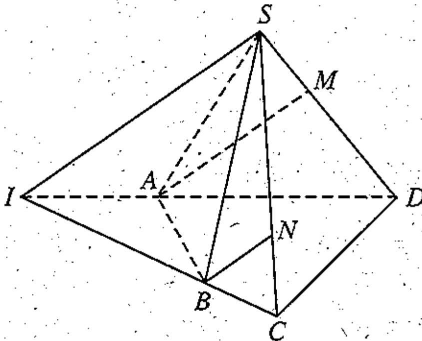
24. (h.77)

Gọi I là giao điểm của BC và AD. Khi đó

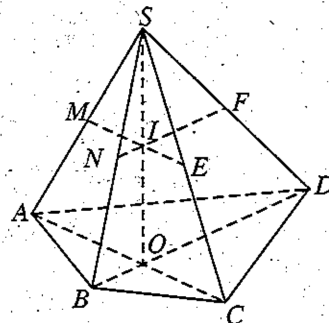
$$(SAD) \cap (SBC) = SI.$$

Giả sử có $M \in SD$, $N \in SC$ sao cho $AM \parallel BN$. Khi đó hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến SI phải song song với AM và BN. Từ đó ta suy ra cách xác định điểm M và N như sau :

Từ A trong mp(SAD) ta kẻ đường thẳng song song với SI, cắt SD tại M ; từ B trong mp(SBC) ta kẻ đường thẳng song song với SI, cắt SC tại N. Khi đó M và N là hai điểm cần tìm.



Hình 77



Hình 78

25. (h.78)

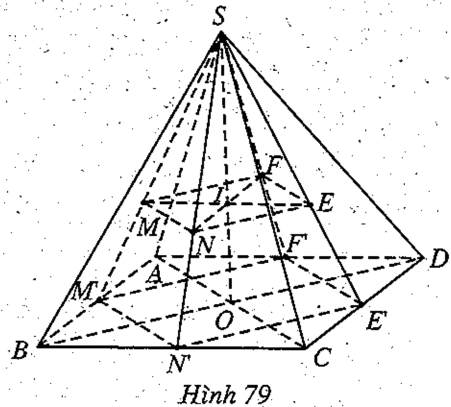
a) Xét tam giác SAC. Ta có ME là đường trung bình nên $ME \parallel AC$. Lí luận tương tự, $NF \parallel BD$.

b) Trong mp(SAC) gọi I là giao điểm của ME và SO. Dễ thấy I là trung điểm của SO. Từ đó FI là đường trung bình của tam giác SOD. Vậy $FI \parallel DO$. Gọi N' là giao điểm của đường thẳng FI với SB. Do $FN' \parallel BD$ và F là trung điểm của SD suy ra N' là trung điểm của SB, tức là $N' \equiv N$. Vậy ba đường thẳng ME, NF, SO đồng quy tại I.

c) Do ME và NF cắt nhau tại I, nên qua ME và NF xác định một mặt phẳng. Từ đó suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

26. (h.79)

Gọi M', N', E', F' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng SM và AB, SN và BC, SE và CD, SF và DA. Khi đó M', N', E', F' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.



Hình 79

Vì M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB và SBC nên

$$\frac{SM}{SM'} = \frac{SN}{SN'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow MN \,//\, M'N' \text{ và } MN = \frac{2}{3}M'N'. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có :

$$EF \,//\, E'F' \text{ và } EF = \frac{2}{3}E'F' \quad (2)$$

$$NE \,//\, N'E' \text{ và } NE = \frac{2}{3}N'E' \quad (3)$$

$$MF \,//\, M'F' \text{ và } MF = \frac{2}{3}M'F'. \quad (4)$$

a) $M'N'$ là đường trung bình của tam giác BAC suy ra

$$M'N' \,//\, AC \text{ và } M'N' = \frac{1}{2}AC \quad (5)$$

tương tự $$E'F' \,//\, AC \text{ và } E'F' = \frac{1}{2}AC. \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $M'N' \,//\, E'F'$ và $M'N' = E'F' = \frac{1}{2}AC$. (7)

Từ (1), (2), (7) suy ra $MN \,//\, EF$. Vậy bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

b) Lí luận tương tự như câu a), ta suy ra

$$N'E' \,//\, M'F' \text{ và } N'E' = M'F' = \frac{1}{2}BD. \quad (8)$$

Từ (1), (2), (3), (4), (7), (8) và $AC = BD$ suy ra

$MN = NE = EF = FM = \frac{1}{3}AC$. Vậy tứ giác $MNEF$ là một hình thoi.

c) Dễ thấy O cũng là giao điểm của $M'E'$ và $N'F'$. Xét ba mặt phẳng $(M'SE')$, $(N'SF')$ và $(MNEF)$. Ta có

$$(M'SE') \cap (N'SF') = SO$$
$$(M'SE') \cap (MNEF) = ME$$
$$(N'SF') \cap (MNEF) = NF$$
$$ME \cap NF = I.$$

Vậy theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng SO, ME và NF đồng quy.

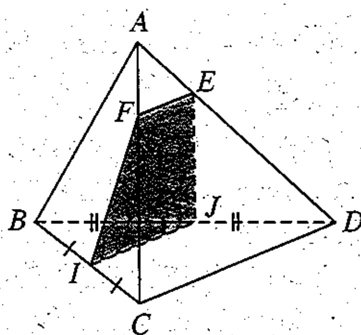
27. (h.80)

a) Ta có IJ là đường trung bình của tam giác BCD nên $IJ \parallel CD$.

Mặt khác $IJ \subset (IJE)$; $CD \subset (ACD)$, suy ra mp(IJE) cắt mp(ACD) theo giao tuyến $Ex \parallel CD$. Gọi F là giao điểm của Ex và AC. Thiết diện là hình thang $EFIJ$.

b) Để thiết diện $EFIJ$ là hình bình hành điều kiện cần và đủ là $IF \parallel JE$.

Điều này tương đương với $JE \parallel AB$ tức là khi và chỉ khi E là trung điểm của AD.



Hình 80

c) Thiết diện $EFIJ$ là hình thoi $\Leftrightarrow$ $EFIJ$ là hình bình hành và $IF = IJ \Leftrightarrow E$ là trung điểm của AD và $AB = CD$ (vì $IJ = \frac{1}{2}CD$ và khi E là trung điểm của AD thì $IF = \frac{1}{2}AB$).

28. (h.81)

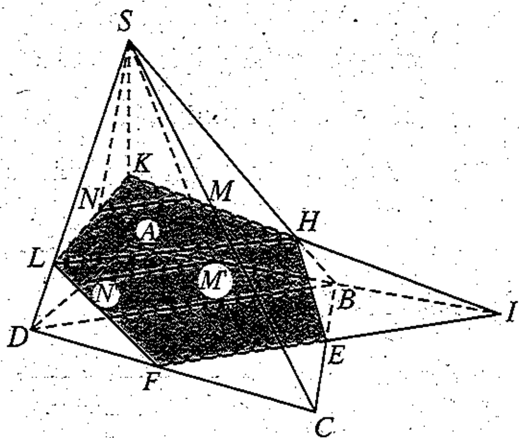
a) Gọi M' và N' lần lượt là trung điểm của AB và AD. Dễ thấy :

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel M'N' \\ M'N' \parallel BD \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel BD.$$

b) Ta có :

$$MN \subset (MNE)$$
$$BD \subset (ABCD)$$
$$MN \parallel BD$$

$\Rightarrow$ $(MNE) \cap (ABCD) = Ex$ thoả mãn $Ex \parallel NM \parallel BD$.



Hình 81

Vậy từ E ta kẻ đường thẳng song song với BD lần lượt cắt CD, AB tại F, I. Nối IM lần lượt cắt SB và SA tại H và K ; nối KN cắt SD tại L. Thiết diện cần tìm là ngũ giác $KLFEH$.

c) Ta có :

$$NM \subset mp(MNE)$$

$$DB \subset mp(SBD)$$

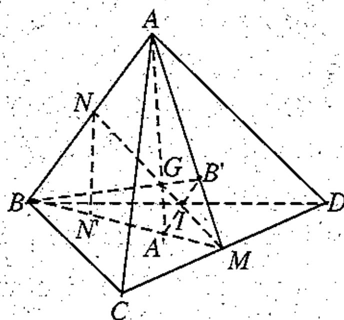
$$MN // DB$$

và $$(MNE) \cap (SBD) = LH.$$

Suy ra $$LH // DB.$$

29. (h.82)

a) Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, ADB và ABC. Do A, B, C, D không đồng phẳng nên AA', BB', CC', DD' không đồng phẳng. Ta chứng minh các đoạn thẳng đó từng đôi cắt nhau.



Hình 82

Gọi M là giao điểm của BA' và CD. Khi đó M là trung điểm của CD. Vì B' là trọng tâm tam giác ACD nên ba điểm A, B', M thẳng hàng. Vậy AA' và BB' cùng thuộc mp(ABM) và A' thuộc đoạn BM, B' thuộc đoạn AM nên AA' và BB' cắt nhau tại điểm G nào đó. Lí luận tương tự, ta cũng có các đường thẳng nói trên từng đôi cắt nhau. Vậy chúng phải đồng quy.

Ta có thể chứng minh cách khác như sau :

Lí luận như trên, trong tam giác ABM ta có AA' và BB' cắt nhau tại G. Vì

$$\frac{A'M}{MB} = \frac{B'M}{MA} = \frac{1}{3}$$

nên $A'B' // AB$.

Suy ra $$\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{MA'}{MB} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $$\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{3}.$$

Nhưng AA', BB' là hai đoạn thẳng tuỳ ý trong bốn đoạn thẳng AA', BB', CC', DD'. Vậy chúng đồng quy tại điểm G và điểm G chia trong mỗi đoạn thẳng đó theo tỉ số 3 : 1 kể từ đỉnh đến trọng tâm của mặt đối diện.

b) Nối M với G và kéo dài cắt AB tại N. Ta sẽ chứng minh N là trung điểm của AB và G là trung điểm của MN. Thật vậy, gọi I là giao điểm của MN với $A'B'$. Vì $A'B' \parallel AB$, ta có :

$$\frac{IB'}{NB} = \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{3}\ ;\ \frac{IB'}{NA} = \frac{MB'}{MA} = \frac{1}{3}$$

nên $$\frac{IB'}{NB} = \frac{IB'}{NA} \Rightarrow NB = NA.$$

Suy ra N là trung điểm của AB.

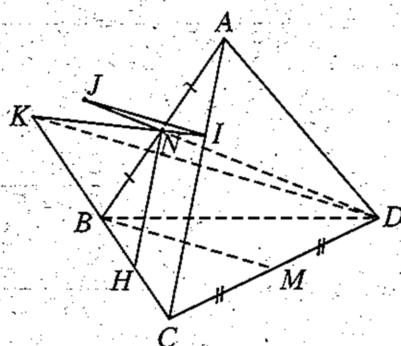
Kẻ $NN' \parallel AA'$ ($N' \in BA'$).

Ta có N' là trung điểm của BA', suy ra A' là trung điểm của $N'M$. Do đó $A'G$ là đường trung bình của tam giác MNN'. Suy ra G là trung điểm của MN.

Vậy điểm G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

30. (h.83)

a) Trong mp(BCD), từ D kẻ đường thẳng song song với BM cắt CB tại K. Đường thẳng KN cắt AC tại I. Trong mp(IKD), từ I kẻ đường thẳng song song với DK cắt đường thẳng DN tại J. Khi đó theo cách dựng ta có $IJ \parallel BM$.



Hình 83

b) Do BM là đường trung bình của tam giác CKD nên

$$KD = 2BM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó

$$NH \parallel AC \Rightarrow \frac{NK}{NI} = \frac{KH}{HC} = \frac{3HC}{HC} = 3$$

$$\Rightarrow NK = 3NI \Rightarrow KD = 3IJ.$$

Vậy $$IJ = \frac{1}{3}KD = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

31. a) *Trường hợp 1. MN // EF.*

Theo hệ quả của định lí giao tuyến của ba mặt phẳng (*ABC*), (*ACD*), (*MNEF*) ta có $MN \parallel EF \parallel AC$. Do đó ta có

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB}, \frac{EC}{ED} = \frac{FA}{FD}$$

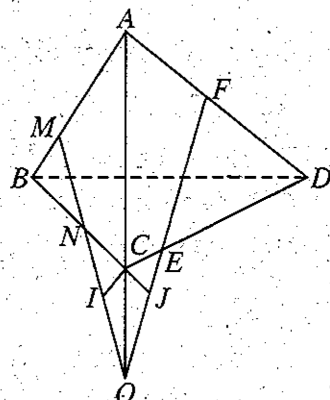
$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = \frac{NC}{NB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{FA}{FD} \cdot \frac{FD}{FA} = 1 \text{ suy ra đpcm.}$$

Trường hợp 2. MN cắt *EF* tại *O* (h.84).

Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng (*ABC*), (*ACD*), (*MNEF*) ta có *MN*, *AC*, *EF* đồng quy tại *O*. Kẻ $CI \parallel AB$, $CJ \parallel AD$ ($I \in MN$, $J \in FE$), ta có

$$\frac{NB}{NC} = \frac{MB}{CI}, \frac{OC}{OA} = \frac{CI}{MA}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{OC}{OA} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{MB}{CI} \cdot \frac{CI}{MA} = 1.$$



Hình 84

Tương tự, ta có

$$\frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{OA}{OC} = 1.$$

Vậy $$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OC}{OA} = 1.$$

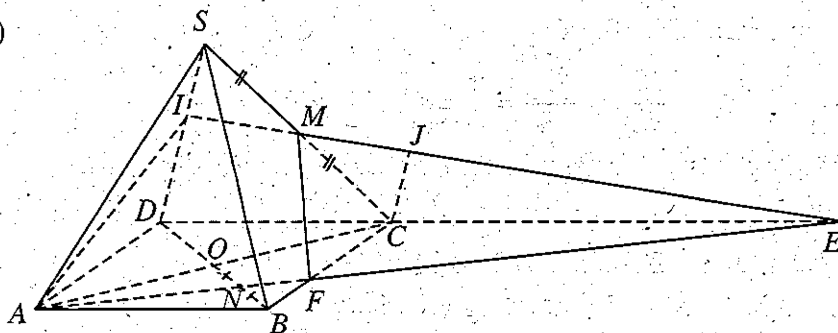
b) Giả sử mặt phẳng (*MNE*) cắt cạnh *AD* tại *F'*. Theo câu a), ta có

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{F'D}{F'A} = 1.$$

Theo giả thiết $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = 1 \Rightarrow F'D = FD$.

Vì *F*, *F'* đều nằm trong đoạn thẳng *AD* nên $F' \equiv F$. Điều này có nghĩa là bốn điểm *M*, *N*, *E*, *F* đồng phẳng.

32. (h.85)



Hình 85

a) Kéo dài AN cắt DC tại E. Nối E và M cắt SD tại I, thế thì I chính là giao điểm của SD và mp(AMN).

b) Gọi F là giao điểm của AN với BC.

$BF \parallel AD \Rightarrow \dfrac{BF}{AD} = \dfrac{NB}{ND} = \dfrac{1}{3}$.

Từ $\dfrac{BF}{AD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{FC}{AD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{EC}{ED} = \dfrac{FC}{AD} = \dfrac{2}{3}$.

Kẻ $CJ \parallel SD$ ($J \in EI$). Ta có :

$$\frac{MC}{MS} = \frac{CJ}{IS}, \frac{ID}{CJ} = \frac{ED}{EC} \Rightarrow \frac{IS}{ID} = \frac{MS}{MC} \cdot \frac{EC}{ED} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Vậy $\dfrac{IS}{ID} = \dfrac{2}{3}$.

§3. Đường thẳng song song với mặt phẳng

33. (h.86)

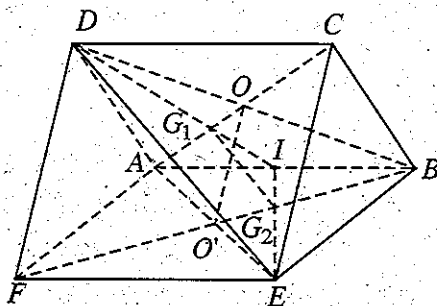
a) OO' là đường trung bình của tam giác BDF suy ra $OO' \parallel DF$.

Mà $DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' \parallel (ADF)$.

OO' là đường trung bình của tam giác ACE suy ra $OO' \parallel CE$.

Mà $CE \subset (BCE) \Rightarrow OO' \parallel (BCE)$.

b) Gọi I là trung điểm của AB thì I thuộc đường thẳng G_1D và đường thẳng G_2E.



Hình 86

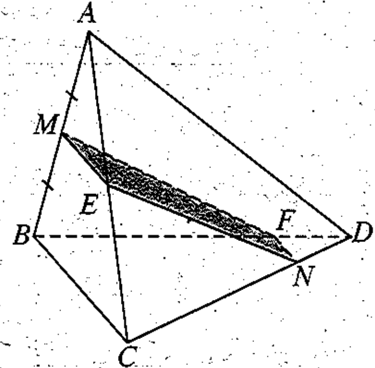
Xét tam giác IDE. Ta có

$$\frac{IG_1}{ID} = \frac{IG_2}{IE} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, ED.$$

Do đường thẳng DE nằm trong mp(CEF) suy ra $G_1G_2 \,//\, (CEF)$.

34. (h.87)

a) Mặt phẳng (ABC) chứa BC và $BC \,//\, (P)$ nên (ABC) cắt (P) theo giao tuyến $ME \,//\, BC$ $(E \in AC)$. Tương tự, mp(DBC) cắt (P) theo giao tuyến $NF \,//\, BC$ $(F \in BD)$. (Dễ thấy E là trung điểm của AC). Thiết diện là hình thang $MENF$.



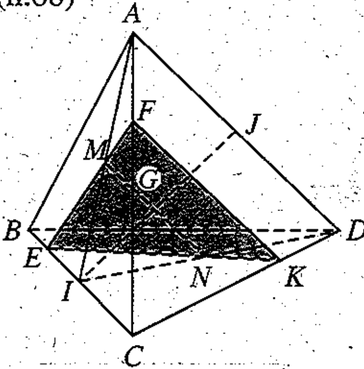
Hình 87

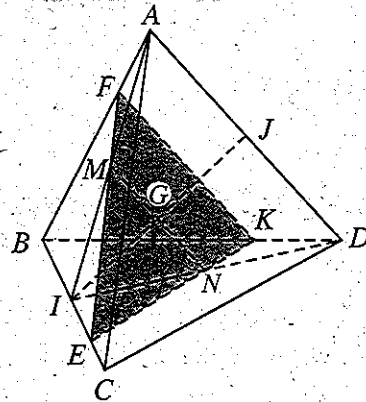
b) Từ câu a), ta có :

$$ME \,//\, NF \text{ và } ME = \frac{1}{2}BC.$$

Vậy tứ giác $MENF$ là hình bình hành khi và chỉ khi $NF = ME = \frac{1}{2}BC$, hay N là trung điểm của CD.

35. a) (h.88)





Hình 88

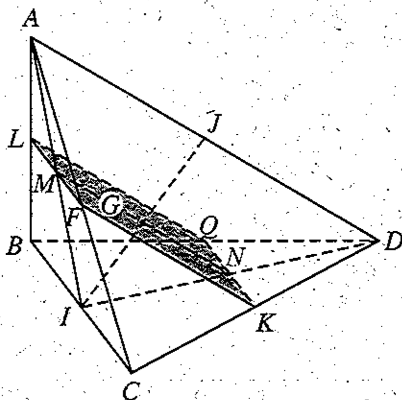
Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và AD thì G là trung điểm của IJ. Mặt phẳng (IAD) chứa AD, $AD \,//\, (P)$ nên (IAD) cắt (P) theo giao tuyến MN qua G và song song với AD $(M \in AI, N \in DI)$.

Khi E trùng với I, thiết diện không tồn tại.

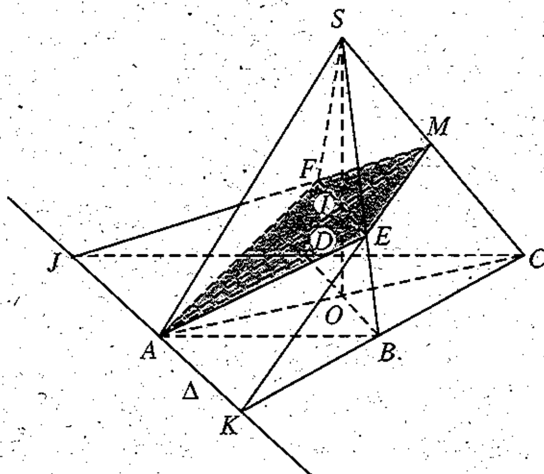
Khi E không trùng với I, ta có thiết diện là tam giác EFK.

b) (h.89)

Theo câu a), mặt phẳng cắt (P) song song với AD và chứa MN. Mặt khác (P) song song với BC nên nó cắt mp(ABC) và (BCD) theo các giao tuyến lần lượt qua M, N và song song với BC. Vậy thiết diện là hình bình hành $LFKQ$.



Hình 89



Hình 90

36. (h.90)

a) Gọi I là giao điểm của SO và AM (O là giao điểm của AC và BD). Vì $BD \parallel (P)$ nên mặt phẳng (SBD) chứa BD cắt (P) theo giao tuyến qua I và song song với BD. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của giao tuyến này với các cạnh SB và SD thì E và F lần lượt là giao điểm của SB và SD với mặt phẳng (P).

Vậy thiết diện là tứ giác $AEMF$.

b) Dễ thấy I là trọng tâm tam giác SAC, ta có :

$$\frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}.$$

Do đó

$$\frac{S_{SME}}{S_{SBC}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SE}{SB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{S_{SMF}}{S_{SCD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

c) Dễ thấy K, A, J là ba điểm chung của hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ nên chúng nằm trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng này. Vì $BD \parallel (P)$ và $BD \subset (ABCD)$ nên $\Delta \parallel BD \Rightarrow \Delta \parallel EF$. Ta có :

$$\frac{EF}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \text{ ; } KJ = 2BD.$$

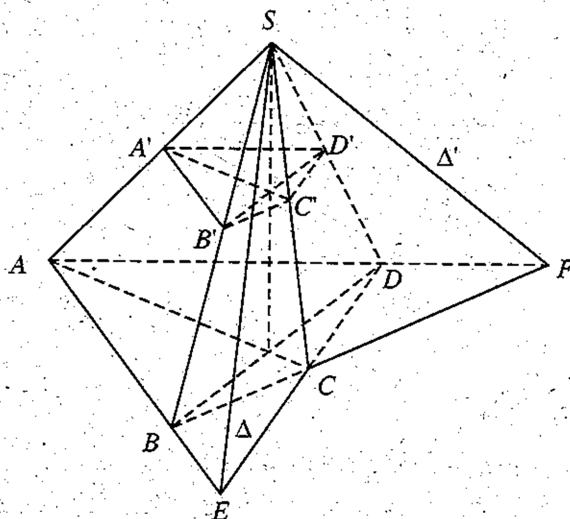
Vậy $$\frac{EF}{KJ} = \frac{1}{3}.$$

37. (h.91)

a) Thiết diện $A'B'C'D'$ là hình thang khi và chỉ khi $A'B' \parallel C'D'$ hoặc $A'D' \parallel B'C'$. Ta có :

• $A'B' \parallel C'D'$ khi và chỉ khi giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) song song với $A'B'$ tức là $\Delta \parallel mp(P)$.

• $A'D' \parallel C'B'$ khi và chỉ khi giao tuyến Δ' của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) song song với $A'D'$ tức là $\Delta' \parallel mp(P)$.



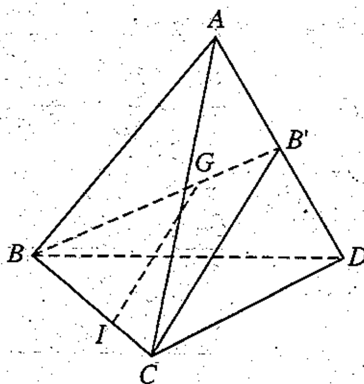
Hình 91

Vậy tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thang khi và chỉ khi (P) song song với Δ hoặc song song với Δ'.

b) Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành khi và chỉ khi $mp(P)$ song song với cả hai đường thẳng Δ và Δ'.

38. (h.92)

Gọi B' là giao điểm của đường thẳng BG và AD. Khi đó B' là trung điểm của AD và $BG = 2GB'$. Mặt khác ta có $BI = 2IC$. Do đó $GI \parallel CB'$. Mà CB' nằm trên $mp(ACD)$ nên IG song song với $mp(ACD)$.



Hình 92

39. (h.93)

a) Ta có $AB \parallel (P), AB \subset (ABC)$

$\Rightarrow (ABC) \cap (P) = MF \parallel AB$

và $AB \parallel (P), AB \subset (ABD)$

$\Rightarrow (ABD) \cap (P) = NE \parallel AB.$

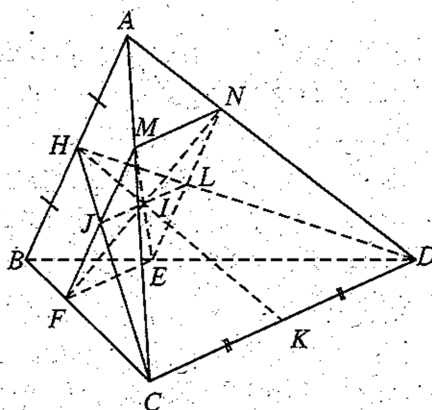
Vậy $MF \parallel NE \parallel AB.$ (1)

Chứng minh tương tự ta có

$MN \parallel EF \parallel CD.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MNEF$ là hình bình hành.

b) Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD.



Hình 93

Gọi J và L lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng CH và MF, DH và NE thì rõ ràng ba điểm J, I, L thẳng hàng. Vậy khi (P) di động thì tâm I của hình bình hành $MNEF$ chạy trên đoạn thẳng HK.

Ngược lại, lấy một điểm I bất kì trên đoạn thẳng HK. Qua I kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt CH và DH tại J và L. Qua J và L lần lượt kẻ hai đường thẳng MF $(M \in AC, F \in BC)$, NE $(N \in AD, E \in BD)$ cùng song song với AB. Dễ thấy tứ giác $MNEF$ là hình bình hành và có tâm là I.

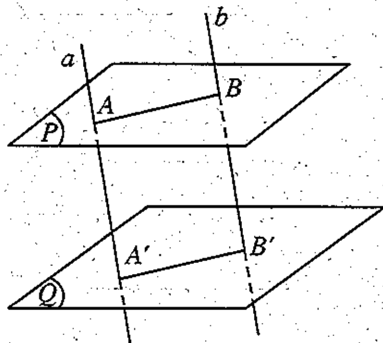
Vậy tập hợp tâm I của hình bình hành $MNEF$ là đoạn thẳng HK.

§4. Hai mặt phẳng song song

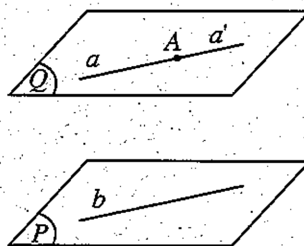
40. a), c).

41. (h.94)

Vì $a \parallel b$ nên có mp$(R) \equiv$ mp(a, b). Mặt phẳng này cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) theo hai giao tuyến song song AB và $A'B'$. Vậy tứ giác $ABB'A'$ có $AB \parallel A'B'$ và $AA' \parallel BB'$; do đó nó là một hình bình hành. Vậy $AA' = BB'$.



Hình 94



Hình 95

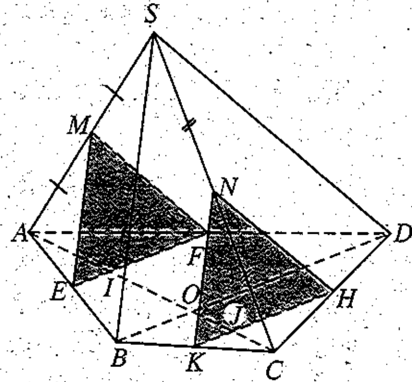
42. (h.95)

Gọi (Q) là mặt phẳng duy nhất đi qua A và song song với (P). Giả sử a là một đường thẳng bất kì qua A và song song với (P). Ta phải chứng minh đường thẳng a nằm trên (Q).

Vì $a \parallel (P)$ nên có đường thẳng b thuộc (P) sao cho a và b song song. Vậy mp(a, b) cắt (Q) theo giao tuyến a' qua A và song song với b. Từ đó a trùng với a', tức là a nằm trên (Q).

43. a) (h.96)

Giả sử (P) là mặt phẳng qua M và song song với mp(SBD) và E, F là giao điểm của (P) với các cạnh AB và AD. Khi đó, dễ thấy $ME \parallel SB$, $MF \parallel SD$ và $EF \parallel BD$. Vậy thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với mp(SBD) là tam giác MEF.



Hình 96

Tương tự, thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua N và song song với mp(SBD) là tam giác NKH với $NK \parallel SB$, $NH \parallel SD$, $KH \parallel BD$.

b) I, J lần lượt là giao điểm của hai mặt phẳng (MEF), (NKH) với AC cũng chính là giao điểm của EF, KH với AC. Do M là trung điểm của SA và $ME \parallel SB$, $MF \parallel SD$ nên E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD. Từ đó suy ra I là trung điểm của AO, (ở đây O là giao điểm của AC và BD).

Vậy $IO = \dfrac{1}{2}AO$.

Tương tự $OJ = \dfrac{1}{2}OC$. Vậy $IJ = \dfrac{1}{2}AC$.

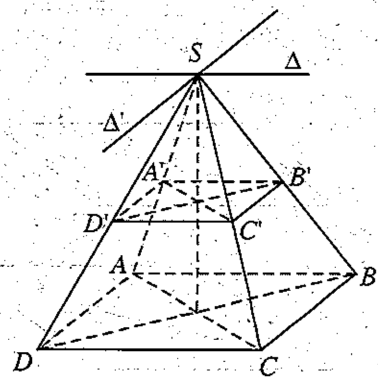
44. (h.97)

- Giả sử $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Ta có :

$$A'B' \parallel C'D'$$
$$A'B' \subset (SAB)$$
$$C'D' \subset (SCD)$$

suy ra giao tuyến Δ của (SAB) và (SCD) song song với $A'B'$ và $C'D'$.



Hình 97

Mặt khác

$$\left.\begin{array}{l} AB \,//\, CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \,//\, AB \,//\, CD.$$

Vậy $A'B' \,//\, AB \Rightarrow A'B' \,//\, (ABCD)$. (1)

Chứng minh tương tự, ta có

$A'D' \,//\, AD \Rightarrow A'D' \,//\, (ABCD)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(P) \,//\, (ABCD)$.

• Giả sử $(P) \,//\, (ABCD)$.

Khi đó hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ bị mặt phẳng (SAB) cắt theo hai giao tuyến $A'B'$ và AB song song.

Tương tự, ta có :

$C'D' \,//\, CD$

$B'C' \,//\, BC$

$A'D' \,//\, AD$.

suy ra $A'B' \,//\, C'D'$ và $B'C' \,//\, A'D'$.

Vậy tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

45. (h.98)

a) Gọi I', J', K' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng SI và AB, SJ và BC, SK và CA. Khi đó I', J', K' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và CA.

Ta có

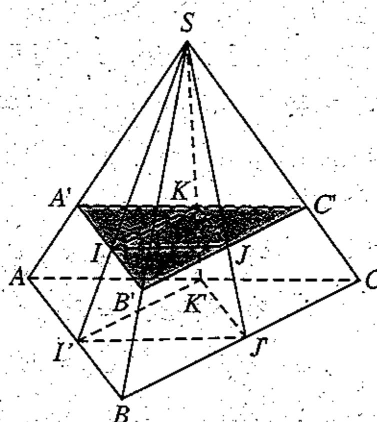
$$\frac{SI}{SI'} = \frac{SK}{SK'} = \frac{SJ}{SJ'} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow IK \,//\, I'K',\ KJ \,//\, K'J'$

$\Rightarrow \text{mp}(IJK) \,//\, \text{mp}(I'J'K')$.

Mặt khác $\text{mp}(I'J'K') \equiv \text{mp}(ABC)$.

Vậy $(IJK) \,//\, (ABC)$.



Hình 98

b) Ta có $KM \,//\, (ABC)$ khi và chỉ khi KM thuộc mp(P) qua K và song song với mp(ABC). Vậy $KM \,//\, (ABC)$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.

Gọi A', B', C' lần lượt là các giao điểm của (P) với các cạnh SA, SB, SC. Khi đó $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$.

Theo giả thiết M chỉ nằm trong hình chóp $S.ABC$, nên tập hợp các điểm M sao cho $KM \parallel (ABC)$ là tam giác $A'B'C'$.

46. (h.99)

a) • $\left.\begin{array}{l}(P) \parallel (SAB)\\ (P) \cap (ABCD) = MN\\ (SAB) \cap (ABCD) = AB\end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel AB$ (1)

• $\left.\begin{array}{l}(P) \parallel (SAB)\\ (P) \cap (SBC) = MF\\ (SAB) \cap (SBC) = SB\end{array}\right\} \Rightarrow MF \parallel SB$ (2)

• $\left.\begin{array}{l}(P) \parallel (SAB)\\ (P) \cap (SAD) = NE\\ (SAB) \cap (SAD) = SA\end{array}\right\} \Rightarrow NE \parallel SA$ (3)

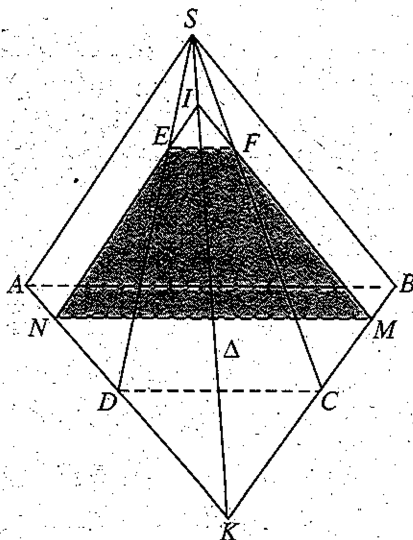
• $\left.\begin{array}{l}(P) \parallel CD\\ CD \subset (SCD)\\ (P) \cap (SCD) = EF\end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel CD$ (4)

Các điểm N, E, F được xác định bởi (1), (2), (3), (4) là giao điểm của (P) với AD, SD, SC có tính chất $EF \parallel MN$. Vậy thiết diện là hình thang $MNEF$.

b) Xét ba mặt phẳng (P), (SAD), (SBC). Ta có :

$$(P) \cap (SAD) = NE$$
$$(P) \cap (SBC) = MF$$
$$(SAD) \cap (SBC) = \Delta.$$

Vậy ba đường thẳng NE, MF, Δ đồng quy tại I (I là giao điểm của NE và MF). Từ đó, điểm I chạy trên đường thẳng Δ cố định.

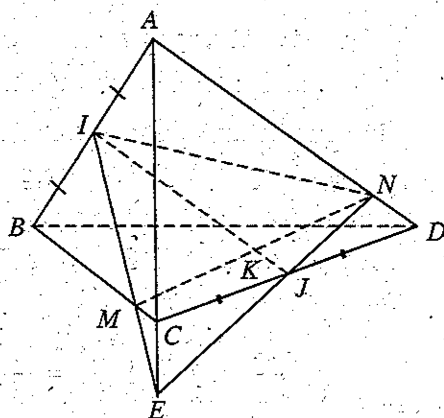


Hình 99

47. (h.100)

a) *Trường hợp M không phải là trung điểm của BC.*

Nối M với I cắt AC tại E. Nối E với J cắt AD tại N. N chính là điểm cần tìm.



Hình 100

Trường hợp M là trung điểm của BC.

Khi đó $IM \parallel AC$ và $(IJM) \parallel AC$. Vậy mp(IJM) cắt mp(ACD) theo giao tuyến $JN \parallel AC$.

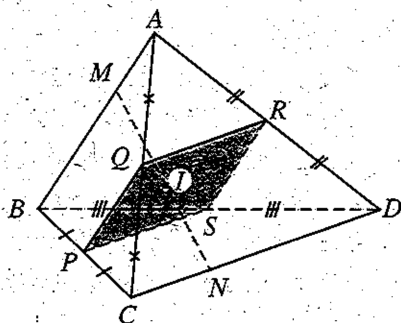
b) Vì $\dfrac{IA}{JD} = \dfrac{IB}{JC} = \dfrac{AB}{DC}$, nên qua IJ, AD, BC có ba mặt phẳng song song (định lí Ta-lét đảo). Ba mặt phẳng này cắt hai đường thẳng AB và NM tại các điểm I, A, B và K, N, M. Vì I là trung điểm của AB nên K là trung điểm của MN (định lí Ta-lét).

48. (h.101)

Phần thuận. Giả sử I là trung điểm của MN. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BC, CA, AD và DB. Vì

$$\frac{PB}{IM} = \frac{PC}{IN} = \frac{BC}{MN}$$

nên BM, PI, CN cùng song song với một mặt phẳng, mặt phẳng này song song với AB và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua P và song song với mặt phẳng đó thì rõ ràng $I \in (\alpha)$. Mặt phẳng này cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là hình bình hành $PQRS$. Vì M chỉ chạy trên đoạn AB, N chỉ di động trên CD nên điểm I luôn nằm trong tứ diện, tức là I luôn nằm trong hình bình hành $PQRS$.



Hình 101

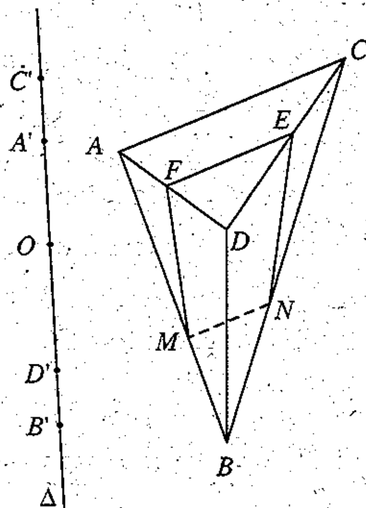
Phần đảo. Lấy một điểm I nằm trong hình bình hành $PQRS$. Qua I có một đường thẳng cắt hai cạnh AB và CD tại M và N (bài tập 32 chương II SGK). Theo định lí Ta-lét thì I là trung điểm của MN.

Vậy tập hợp các điểm I là hình bình hành $PQRS$ (cùng với các điểm trong của nó).

49. (h.102)

a) Ta vẽ một đường thẳng Δ bất kì cắt mặt phẳng $(MNEF)$ tại một điểm O.

Bốn mặt phẳng lần lượt qua A, B, C, D và đồng thời song song với mặt phẳng $(MNEF)$ cắt đường thẳng Δ theo thứ tự tại A', B', C' và D'. Theo định lí Ta-lét ta có



Hình 102

$$\frac{MA}{MB} = \frac{OA'}{OB'},\ \frac{NB}{NC} = \frac{OB'}{OC'},$$

$$\frac{EC}{ED} = \frac{OC'}{OD'},\ \frac{FD}{FA} = \frac{OD'}{OA'}.$$

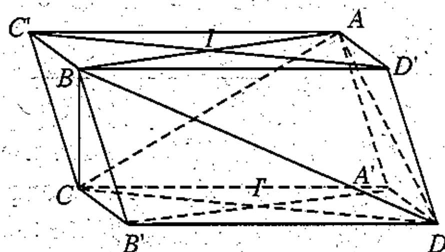
Vậy

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = \frac{OA'}{OB'} \cdot \frac{OB'}{OC'} \cdot \frac{OC'}{OD'} \cdot \frac{OD'}{OA'} = 1.$$

b) Chứng minh như câu b) bài 31 (chương II).

50. (h.103)

Cách 1. Qua mỗi cạnh của hình tứ diện $ABCD$ ta dựng một mặt phẳng song song với cạnh đối diện. Khi đó sáu mặt phẳng vừa dựng sẽ cắt nhau theo một hình hộp cần tìm có sáu mặt bên nằm trên sáu mặt phẳng nói trên.



Hình 103

Cách 2. Qua trung điểm I của AB ta dựng đoạn thẳng $C'D'$ bằng đoạn CD sao cho $C'D' \parallel CD$ và I là trung điểm của $C'D'$. Qua trung điểm I' của CD ta dựng đoạn $A'B'$ bằng đoạn AB sao cho $A'B' \parallel AB$ và I' là trung điểm của $A'B'$. Khi đó rõ ràng $AC'BD'.A'CB'D$ là hình hộp cần dựng.

51. (h.104)

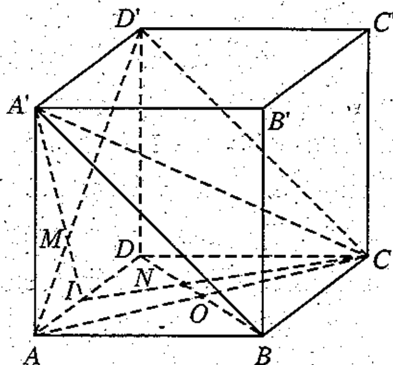
a) *Sử dụng định lí Ta-lét.*

Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với mp$(A'D'CB)$ (có (P) vì $AD \parallel A'D'$).

Gọi (*Q*) là mặt phẳng qua *M* và song song với mp($A'D'CB$). Giả sử (*Q*) cắt DB tại N'.

Theo định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{AM}{AD'} = \frac{DN'}{DB}. \quad (*)$$



Hình 104

Vì các mặt của hình hộp là hình vuông cạnh *a* nên

$$AD' = DB = a\sqrt{2}.$$

Từ (*), ta có $AM = DN'$

$$\Rightarrow DN' = DN$$

$$\Rightarrow N' \equiv N$$

$$\Rightarrow MN \subset (Q).$$

Mà (Q) // $(A'D'CB)$ suy ra MN luôn song song với mặt phẳng cố định ($A'D'CB$).

Sử dụng định lí Ta-lét đảo.

Từ giả thiết ta có $\frac{AM}{DN} = \frac{MD'}{NB} = \frac{AD'}{DB}$

suy ra AD, MN và $D'B$ luôn song song với một mặt phẳng (định lí Ta-lét đảo). Vậy MN luôn song song với một mặt phẳng (*P*), mà (*P*) song song với AD và $D'B$. Có thể chọn mặt phẳng này chính là mp($A'D'CB$).

b) Gọi *O* là giao điểm của DB và AC. Ta có

$$DN = x = \frac{a\sqrt{2}}{3}, DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad DN = \frac{2}{3}DO$$

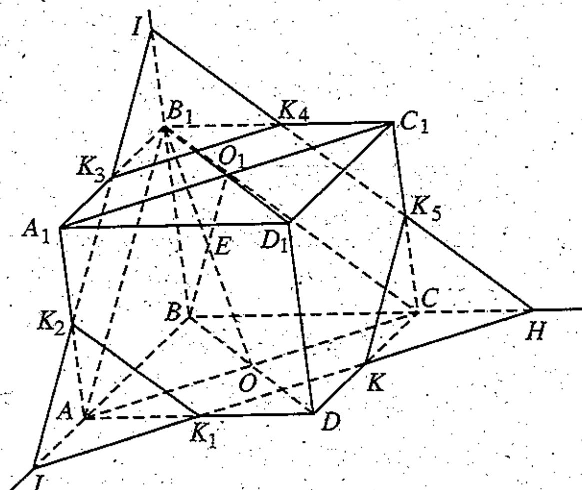
suy ra *N* là trọng tâm tam giác *ADC*.

Chứng minh tương tự, ta có *M* là trọng tâm tam giác $A'AD$. Vậy CN và $A'M$ cắt nhau tại *I* là trung điểm của *AD*. Ta có

$$\frac{IM}{IA'} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \,//\, A'C.$$

52. (h.105)

a) Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Dễ thấy B_1O_1OB là hình bình hành, nên trung điểm E của đường chéo BO_1 cũng là trung điểm của đường chéo OB_1. Do đó E nằm trên OB_1. Mà OB_1 nằm trên mp(ACB_1). Vậy E nằm trên mp(ACB_1).



Hình 105

b) Theo câu a) thì mp(ACB_1) cũng là mp(EAC). Do đó (P) là mặt phẳng qua K và song song với mp(ACB_1). Từ K kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD, AB, BC lần lượt tại K_1, J, H. Từ J kẻ đường thẳng song song với AB_1, cắt AA_1, A_1B_1, BB_1 lần lượt tại K_2, K_3, I. Nối I và H cắt B_1C_1, C_1C tại K_4 và K_5.

Dễ thấy thiết diện là lục giác $KK_1K_2K_3K_4K_5$ có các cạnh đối song song với nhau.

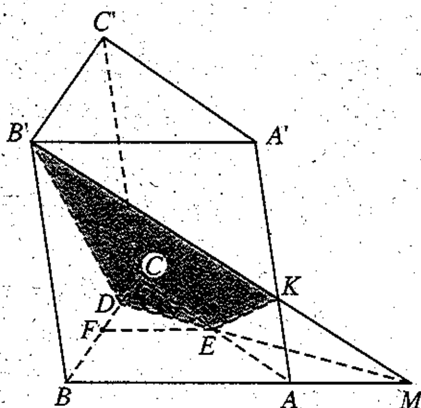
53. (h.106)

a) Trong mp($ABB'A'$) nối M với B' cắt AA' tại K.

Trong mp(ABC) nối M với E cắt CB tại D.

Thiết diện là tứ giác $DEKB'$.

b) Kẻ EF // AB ($F \in CB$). Khi đó EF là đường trung bình của tam giác ABC và $EF = \dfrac{AB}{2}$. Xét tam giác DBM ta có



Hình 106

$$\frac{FD}{BD} = \frac{EF}{BM} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $FD = \dfrac{1}{2}BF = \dfrac{1}{2}FC$, tức D là trung điểm của FC.

Vậy $\dfrac{BD}{CD} = 3$.

54. (h.107)

a) Ta có IJ là đường trung bình của tam giác $C'AB$, nên $IJ // AB$. Mà AB nằm trên mp$(ABB'A')$. Vậy $IJ // (ABB'A')$.

Chứng minh tương tự, ta có

$JK // (ACC'A')$, $IK // (BCC'B')$.

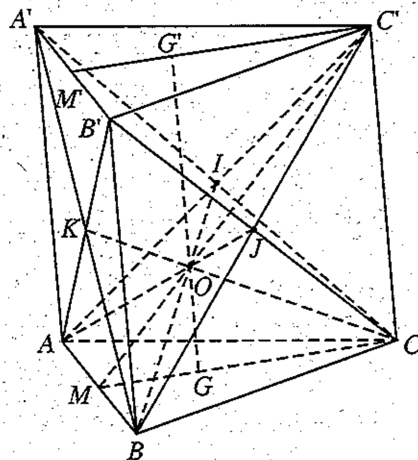
b) Xét ba mặt phẳng $(C'AB)$, $(A'BC)$, $(B'AC)$. Ta có

$(C'AB) \cap (A'BC) = BI$

$(C'AB) \cap (B'AC) = AJ$

$(B'AC) \cap (A'BC) = CK$.

Vậy theo định lí giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng BI, AJ, CK đồng quy tại một điểm.



Hình 107

c) Theo câu a), ta có

$$\left.\begin{matrix} IJ // AB \\ JK // AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow (IJK) // (ABC).$$

d) Dễ thấy O là trọng tâm tam giác $C'AB$. Gọi M là giao điểm của $C'O$ với AB thì M là trung điểm của AB. Vậy ba điểm M, G, C thẳng hàng.

Vì O và G lần lượt là trọng tâm của hai tam giác $C'AB$ và CAB nên ta có

$$\frac{MO}{MC'} = \frac{MG}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow OG // CC'. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự $\quad OG' // CC'$. (2)

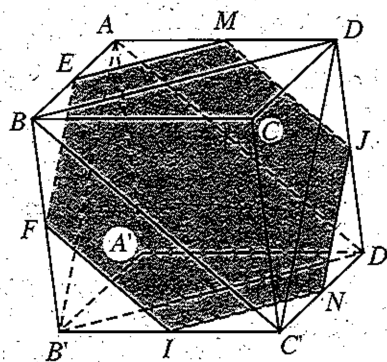
Từ (1) và (2) suy ra ba điểm O, G, G' thẳng hàng.

55. (h.108)

a) Theo giả thiết, ta có

$$\frac{AM}{MD} = \frac{D'N}{NC'}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{MD}{NC'} = \frac{AD}{D'C'}.$$



Hình 108

Theo định lí Ta-lét đảo ta có MN, AD', DC' cùng song song với một mặt phẳng (P). Mặt phẳng (P) song song với AD' và DC'. Nhưng $AD' // BC'$ nên mặt phẳng (P) song song với mp$(C'BD)$. Từ đó, ta có $MN // (C'BD)$.

b) Từ M kẻ $ME // BD$, cắt AB tại E ; từ E kẻ đường thẳng $EF // AB'$, cắt BB' tại F ; từ F kẻ đường thẳng $FI // BC'$, cắt $B'C'$ tại I ; từ N kẻ đường thẳng $NJ // C'D$ cắt $D'D$ tại J. Dễ thấy thiết diện là lục giác $MEFINJ$ có các cạnh đối lần lượt song song với ba cạnh của tam giác $C'BD$.

56. (h.109)

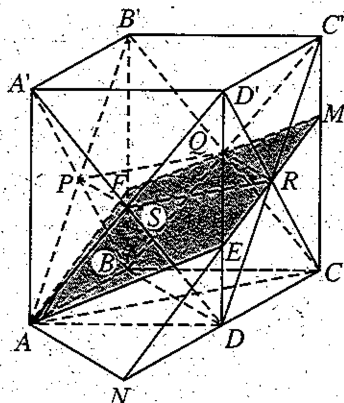
a) Dễ thấy QR là đường trung bình của tam giác $C'BD$ nên $QR // BD$. Mà BD nằm trên mp$(ABCD)$, suy ra

$$QR // (ABCD). \quad (1)$$

Lí luận tương tự ta có

$$PQ // (ABCD). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(PQRS) // (ABCD)$.



Hình 109

b) Theo câu a), ta có $QR // (ABCD)$ suy ra mặt phẳng (AQR) cắt mp$(ABCD)$ theo một giao tuyến song song với BD. Giao tuyến này cắt CD tại N. Nối N với R cắt DD' và CC' lần lượt tại E và M. Nối M với Q cắt BB' tại F. Dễ thấy thiết diện là hình bình hành $AEMF$.

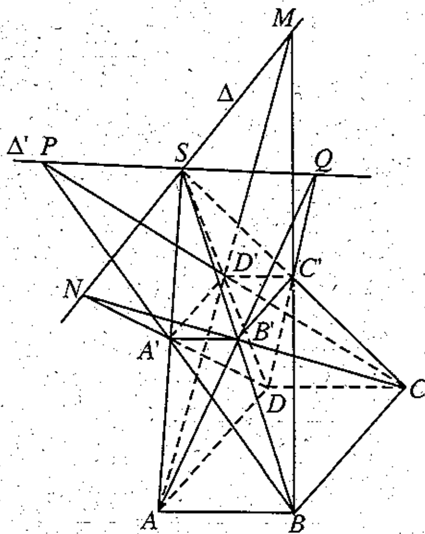
c) Do $AN // BD$ suy ra D là trung điểm của CN, dễ thấy

$$\Delta EDR = \Delta MC'R \Rightarrow DE = MC'.$$

Mặt khác $DE // CM$

suy ra $\dfrac{DE}{CM} = \dfrac{ND}{NC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{MC'}{MC} = \dfrac{1}{2}$.

57. (h.110) Gọi S là điểm đồng quy của các cạnh AA', BB', CC', DD'. Vì BC song song với AD nên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng $(BB'C'C)$, $(AA'D'D)$ đi



Hình 110

qua S và song song với BC. Rõ ràng M, N là hai điểm chung của hai mặt phẳng nói trên. Do đó M, N đều thuộc Δ. Lí luận tương tự , hai điểm P, Q thuộc giao tuyến Δ' của hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ (giao tuyến này đi qua S và song song với AB). Vậy bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên mp(Δ, Δ').

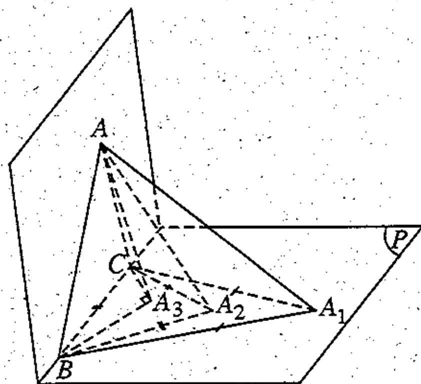
§5. Phép chiếu song song

58. (h.111)

a) Qua BC ta dựng một mặt phẳng (P) không đi qua A. Trong mặt phẳng (P) ta dựng tam giác cân BCA_1 $(BA_1 = CA_1)$. Khi đó, phép chiếu song song lên mp(P) theo phương chiếu $l = AA_1$ biến tam giác ABC thành tam giác cân A_1BC.

b) Trong (P) ở câu a), ta dựng tam giác đều BCA_2 và chọn phương chiếu $l = AA_2$.

c) Trong (P) ở câu a), ta dựng tam giác vuông BCA_3 ($\widehat{BA_3C} = 90^\circ$) và chọn phương chiếu $l = AA_3$.



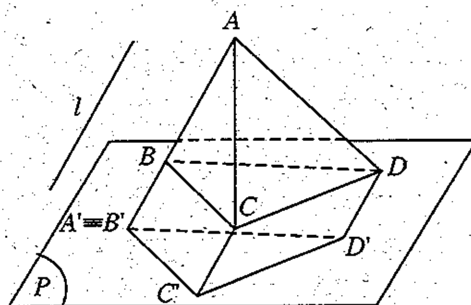
Hình 111

59. (h.112)

Vì phương chiếu l là đường thẳng AB nên hình chiếu của đoạn thẳng AB là giao điểm của AB và (P).

Do đó $\quad AB \cap (P) = A' \equiv B'$.

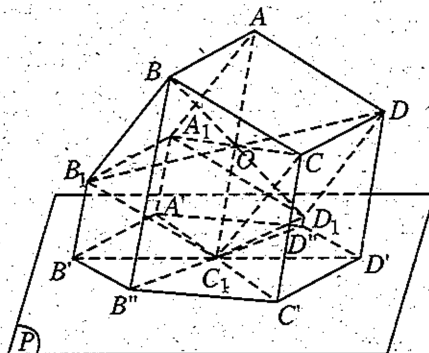
C và D có hình chiếu là C' và D'. Vậy hình chiếu của tứ diện $ABCD$ lên mp(P) theo phương chiếu AB là tam giác $A'C'D'$.



Hình 112

60. (h.113)

Chọn mặt phẳng chiếu (P) qua C_1 và không chứa A. Gọi O là tâm của hình hộp. Khi đó hình chiếu của các điểm A, O, C_1 là điểm C_1.



Hình 113

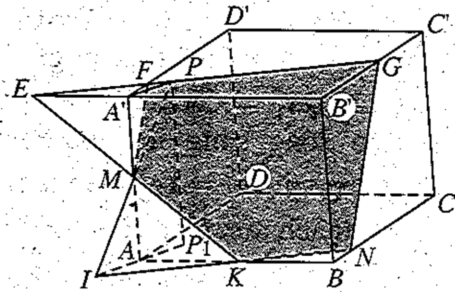
Hình chiếu của đoạn thẳng B_1D là đoạn thẳng $B'D'$ nhận C_1 làm trung điểm.
Hình chiếu của đoạn thẳng CA_1 là đoạn thẳng $C'A'$ nhận C_1 làm trung điểm.
Hình chiếu của đoạn thẳng BD_1 là đoạn thẳng $B''D''$ nhận C_1 làm trung điểm.

Vậy hình chiếu của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ lên mp(P) theo phương chiếu AC_1 là lục giác $A'B'B''C'D'D''$ có các cạnh đối song song và bằng nhau.

61. Thông thường là một hình tứ giác $ABCD$ và hai đường chéo AC, BD có các nét khuất, nét liền.

62. (h.114)

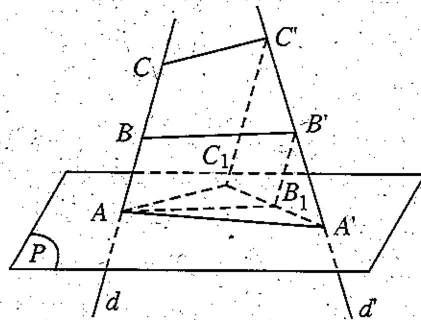
Trước hết, ta tìm giao điểm của đường thẳng PM với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi P_1 là hình chiếu song song của P trên mp$(ABCD)$ theo phương chiếu AA'. Khi đó PM cắt P_1A tại I. Vì I thuộc mp$(ABCD)$ nên IN cắt AB tại K. Gọi E là giao điểm của KM với $A'B'$. Nối E với P cắt $A'D'$ và $B'C'$ lần lượt tại F và G. Vậy thiết diện là ngũ giác $MKNGF$.



Hình 114

63. (h.115)

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua AA' và song song với BB'. Theo định lí Ta-lét, ta cũng có $CC' \parallel$ mp(P). Xét phép chiếu song song lên mp(P) theo phương chiếu d, ta được hình chiếu của A', B', C' tương ứng là A', B_1, C_1. Khi đó ba điểm A', B_1, C_1 thẳng hàng. Ta có $C'C_1 \parallel CA$ và vì $CC' \parallel$ mp(P) nên giao tuyến AC_1 của mp$(CC'C_1A)$ với mp(P) song song với CC'. Do đó tứ giác $CC'C_1A$ là hình bình hành, nên $AC_1 = CC'$. Tương tự như vậy, ta cũng chứng minh được $AB_1 = BB'$. Ta phải chứng minh $AA' + AC_1 > 2AB_1$.

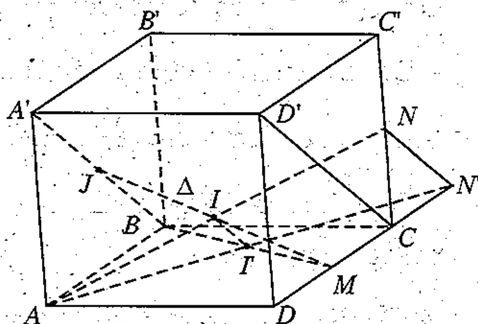


Hình 115

Thật vậy, vì B' là trung điểm của $A'C'$ nên B_1 là trung điểm của cạnh $A'C_1$ của tam giác $AA'C_1$. Từ đó dễ thấy tổng hai cạnh AA' và AC_1 trong tam giác $AA'C_1$ lớn hơn hai lần trung tuyến ứng với cạnh thứ ba.

64. (h.116)

a) Giả sử đã dựng được đường thẳng Δ cần tìm cắt cả AN và BA'. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và BA'.



Hình 116

Xét phép chiếu song song lên mp($ABCD$) theo phương chiếu $A'B$. Khi đó ba điểm J, I, M lần lượt có hình chiếu là B, I' và M. Do đó ba điểm B, I', M thẳng hàng. Gọi N' là hình chiếu của N thì AN' là hình chiếu của AN. Vì I thuộc AN nên I' thuộc AN'. Vậy I' là giao điểm của BM và AN'.

Từ phân tích ở trên ta có thể dựng đường thẳng Δ theo các bước sau đây :

– Lấy giao điểm I' của AN' và BM.

– Trong mp(ANN') dựng $II' \parallel NN'$ (đã có $NN' \parallel CD'$) cắt AN tại I.

– Vẽ đường thẳng MI, đó là đường thẳng Δ cần tìm.

Dễ chứng minh được, đường thẳng Δ nói trên cắt BA'.

b) Dễ thấy $MC = CN'$

suy ra $MN' = CD = AB$.

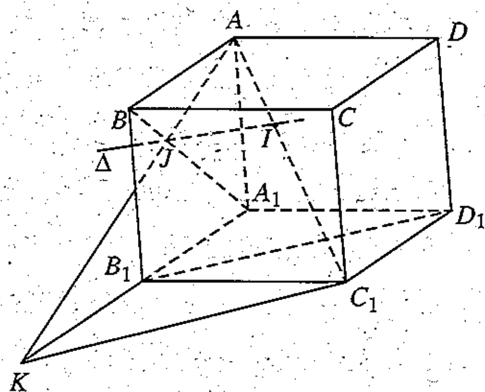
Do đó I' là trung điểm của BM.

Mặt khác $II' \parallel JB$, nên II' là đường trung bình của tam giác MBJ, suy ra

$$IM = IJ \Rightarrow \frac{IM}{IJ} = 1.$$

65. (h.117)

a) Giả sử đã xác định được đường thẳng Δ cắt AC_1 và BA_1 lần lượt tại I và J.



Hình 117

Xét phép chiếu song song lên mp(ABB_1A_1) theo phương chiếu D_1B_1. Khi đó, hình chiếu của ba điểm thẳng hàng A, I, C_1 lần lượt là ba điểm thẳng hàng A, J, K. Mặt khác J thuộc BA_1, nên J chính là giao điểm của AK và BA_1.

Từ đó, ta có cách dựng đường thẳng Δ theo các bước sau đây :

– Dựng điểm K là hình chiếu của C_1 (theo phương chiếu D_1B_1).

– Lấy giao điểm J của AK và BA_1.

– Qua J dựng đường thẳng Δ // C_1K (đã có C_1K // B_1D_1) ta được đường thẳng Δ cần tìm.

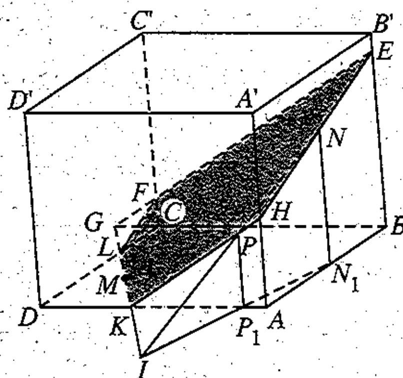
b) Dễ thấy $A_1B_1 = B_1K \Rightarrow A_1K = 2AB$ (do $A_1B_1 = AB$).

Vì AB // $A_1K \Rightarrow \dfrac{AJ}{JK} = \dfrac{AB}{A_1K} = \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác IJ // $C_1K \Rightarrow \dfrac{AI}{IC_1} = \dfrac{AJ}{JK} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AI}{AC_1} = \dfrac{1}{3}$.

66. (h.118)

a) Giả sử M, N, P lần lượt là các điểm trong của các mặt phẳng ($ABCD$), ($ABB'A'$), ($ADD'A'$) xác định như hình vẽ. Trước hết ta tìm giao điểm I của PN với mp($ABCD$). Ta xét phép chiếu song song lên mp($ABCD$) theo phương chiếu AA'. Các điểm N, P có hình chiếu lần lượt là N_1, P_1 ($N_1 \in AB$, $P_1 \in AD$). Khi đó I là giao điểm của PN với P_1N_1.



Hình 118

Trong mp($ABCD$) nối I và M lần lượt cắt DA, DC và CB tại K, L, G.

Trong mặt phẳng ($AA'D'D$) nối K và P cắt AA' tại H.

Trong mặt phẳng ($AA'B'B$) nối H và N cắt BB' tại E.

Trong mặt phẳng ($BCC'B'$) nối E và G cắt CC' tại F.

Vậy thiết diện là ngũ giác $EFLKH$.

b) Làm tương tự như câu a).

67. (h.119)

Hình 119

a) *Phân tích*

Giả sử đã dựng được tam giác ABC có ba đỉnh A, B, C lần lượt nằm trên ba đường thẳng a, b, c đôi một chéo nhau cho trước và nhận điểm G làm trọng tâm.

Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên a, b, c và gọi (P) là mp$(A_1B_1C_1)$. Xét phép chiếu song song lên mp(P) theo phương chiếu là đường thẳng a. Gọi tam giác $A_1B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC. Khi đó trọng tâm G' của tam giác $A_1B'C'$ là hình chiếu của trọng tâm G của tam giác ABC, trung điểm I' của $B'C'$ là hình chiếu của trung điểm I của BC.

Vậy khi đã chọn (P) thì các điểm A_1, G' dựng được và do đó I' cũng dựng được. Ta chỉ cần dựng hai điểm B' và C' sao cho tam giác $A_1B'C'$ nhận G' làm trọng tâm với $B' \in b_1$, $C' \in c_1$ (b_1, c_1 lần lượt là hình chiếu của b và c).

b) *Cách dựng*

Lấy ba điểm A_1, B_1, C_1 tuỳ ý sao cho $A_1 \in a, B_1 \in b, C_1 \in c$.

Xác định mặt phẳng (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A_1, B_1, C_1.

Dựng các hình chiếu b_1, c_1 của b và c trên (P) theo phương chiếu a và dựng hình chiếu G' của điểm G.

Trong mp(P), dựng điểm I' sao cho $\overrightarrow{A_1I'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A_1G'}$.

Trong mp(P), dựng điểm $B' \in b_1$, $C' \in c_1$ sao cho I' là trung điểm của $B'C'$.

Dựng điểm $B \in b$, $C \in c$ sao cho $BB' \,//\, CC' \,//\, a$.

Dựng điểm $I \in BC$ sao cho $II' \,//\, a$, hay I là trung điểm của BC.

Trong mp(a, II') dựng đường thẳng IG cắt a tại A.

Dựng tam giác ABC với ba điểm A, B, C vừa dựng được.

c) *Chứng minh*

Vì $$AA_1 \,//\, G'G \,//\, II'$$

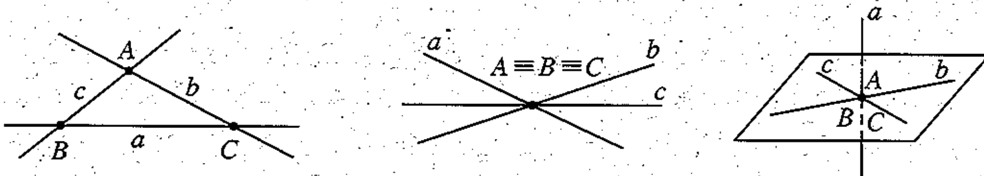
nên $$\frac{AI}{AG} = \frac{A_1I'}{A_1G'} = \frac{3}{2}$$

suy ra G là trọng tâm tam giác ABC.

d) *Biện luận*. Bài toán có một nghiệm hình.

Bài tập ôn tập chương II

68. (h.120)



Hình 120

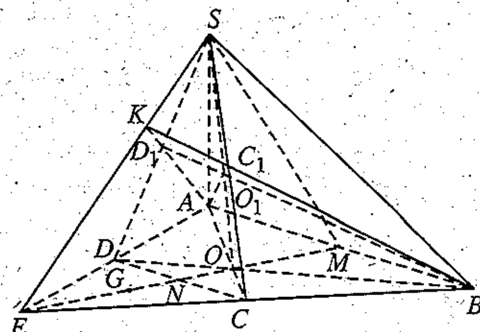
Ta nhận thấy rằng : Nếu ba đường thẳng bất kì trong n đường thẳng ($n \geq 3$) đã cho đồng quy thì n đường thẳng đó đồng quy. Còn nếu tồn tại ba đường thẳng không đồng quy mà từng đôi một cắt nhau tại ba điểm A, B, C thì rõ ràng A, B, C không thẳng hàng. Khi đó các đường thẳng còn lại đều cắt ba đường thẳng nói trên nên chúng đều thuộc mp(ABC) (trái với giả thiết). Vậy ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $n = 3$.

Giả sử ba đường thẳng đã cho là a, b và c ; A, B, C lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng b và c, c và a, a và b. Nếu các điểm A, B, C phân biệt từng cặp thì dễ thấy a, b, c đều thuộc mp(ABC) (trái với giả thiết). Vậy các điểm A, B, C phải trùng nhau. Do đó ba đường thẳng a, b, c đồng quy.

69. (h.121)

a) Gọi N là giao điểm của EM và CD. Do M là trung điểm của AB và $AB \,//\, CD$ nên N cũng là trung điểm của CD ; suy ra G thuộc EM, hay $G \in$ mp(SEM), tức là các điểm S, E, M, G thuộc mp(SEM).

Gọi O là giao điểm của AC và BD thì đường thẳng MN đi qua O. Vậy



Hình 121

ba mặt phẳng (SEM), (SAC) và (SBD) đều có chung hai điểm S và O nên SO chính là giao tuyến chung Δ của ba mặt phẳng trên.

b) Vì K thuộc AD_1 và BC_1 nên tương ứng K thuộc mp(SAD) và mp(SBC). Do đó K nằm trên giao tuyến SE của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Vậy ba điểm S, E, K thẳng hàng.

Điểm O_1 nằm trên AC_1 và BD_1 nên O_1 phải thuộc (SAC) và (SBD) (do $AC_1 \subset (SAC)$, $BD_1 \subset (SBD)$). Từ đó, suy ra O_1 phải thuộc giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

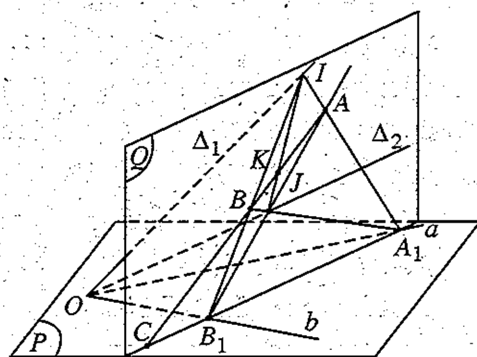
70. (h.122)

a) Mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (P) có ba điểm chung là A_1, B_1 và C nên ba điểm đó phải thẳng hàng ; tức là đường thẳng A_1B_1 luôn đi qua điểm cố định C.

b) Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} I \in AA_1 \\ AA_1 \subset \text{mp}(A, a) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in \text{mp}(A, a)\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} I \in BB_1 \\ BB_1 \subset \text{mp}(B, b) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in \text{mp}(B, b).$$



Hình 122

Từ đó, suy ra I thuộc giao tuyến Δ_1 của hai mặt phẳng (B, b) và (A, a). Do hai mặt phẳng này cố định nên đường thẳng Δ_1 cố định.

Chứng minh tương tự, điểm J chạy trên đường thẳng cố định Δ_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng cố định mp(A, b) và mp(B, a). (Chú ý Δ_1, Δ_2 đều đi qua O).

c) Hai đường thẳng IJ, AB đều thuộc mp(Q) và chúng không thể song song nên chúng cắt nhau tại một điểm K.

Ta có

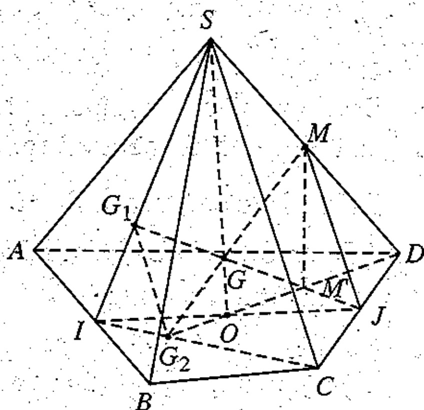
$$\left.\begin{array}{l} K \in IJ \\ IJ \subset \text{mp}(\Delta_1, \Delta_2) \end{array}\right\} \Rightarrow K \in \text{mp}(\Delta_1, \Delta_2).$$

Mặt khác K thuộc AB. Do đó K chính là giao điểm của đường thẳng cố định AB với mp(Δ_1, Δ_2) cố định nên K cố định. Vậy đường thẳng IJ luôn đi qua điểm K cố định.

71. (h.123)

a) Ta có

$$\frac{IG_1}{IS} = \frac{IG_2}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, SC.$$



Hình 123

Mặt khác MJ là đường trung bình của tam giác DSC nên $MJ \,//\, SC$. Từ đó, suy ra $G_1G_2 \,//\, MJ$.

b) Rõ ràng tám đường thẳng đã cho không đồng phẳng ; ta chỉ cần chứng minh chúng cắt nhau từng đôi.

Lấy hai đường thẳng bất kì trong tám đường thẳng trên (chẳng hạn như hai đường thẳng MG_2 và JG_1). Theo câu a) thì $G_1G_2 \,//\, MJ$, do đó MG_2 và JG_1 nằm trong mp(G_1G_2JM). Vậy MG_2 và JG_1 cắt nhau.

Vậy theo bài 68 (chương II), ta có tám đường thẳng đã cho không đồng phẳng và từng đôi cắt nhau nên chúng đồng quy tại một điểm G.

c) Xét mp($ABCD$). Dễ thấy

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -3\overrightarrow{OG_2}$ (vì G_2 là trọng tâm tam giác ABC)

$\Rightarrow O, G_2, D$ thẳng hàng và $OD = 3OG_2$.

Xét ba mặt phẳng (G_1G_2JM), (G_2MD), (SIJ). Ta có

$$(G_1G_2JM) \cap (G_2MD) = G_2M$$
$$(G_1G_2JM) \cap (SIJ) = G_1J$$
$$(G_2MD) \cap (SIJ) = SO.$$

Vậy G_2M, G_1J và SO đồng quy. Theo kết quả câu b) thì G_2M và G_1J cắt nhau tại G. Vậy điểm G nằm trên SO.

Kẻ MM' song song với SO và cắt G_2D tại M', ta có

$$OM' = M'D = \frac{1}{2}OD = \frac{3}{2}OG_2 \text{ và } \frac{OG}{MM'} = \frac{OG_2}{G_2M'} = \frac{OG_2}{\frac{5}{2}OG_2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \quad OG = \frac{2}{5}MM' = \frac{1}{5}SO$$

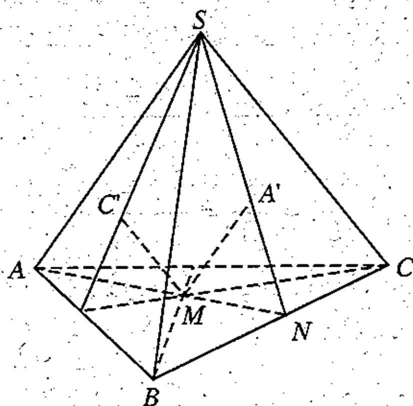
$$\Rightarrow \quad GS = 4GO.$$

72. (h.124)

a) Vì $A'M // SA$ nên có mp(MA', SA). Mặt phẳng này và mặt phẳng (ABC) có ba điểm chung A, M, N. Do đó ba điểm A, M, N phải nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng nói trên. Vậy ba điểm đó phải thẳng hàng.

Kéo dài AM cắt BC tại N. Trong mp(SAN) kẻ MA' song song với SA cắt SN tại A'. Điểm A' là điểm cần tìm.

Tương tự xác định được các điểm B', C'.



Hình 124

b) Dễ thấy $\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{MN}{AN}$

mà $\dfrac{MN}{AN} = \dfrac{MA'}{SA}$.

Vậy $\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{MA'}{SA}$.

c) Chứng minh tương tự như câu b), ta có

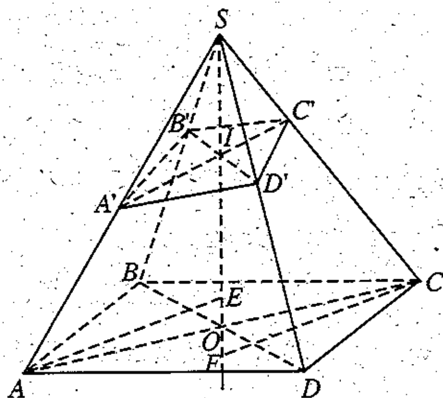
$$\frac{S_{MCA}}{S_{ABC}} = \frac{MB'}{SB}, \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} = \frac{MC'}{SC}.$$

Vậy $\dfrac{MA'}{SA} + \dfrac{MB'}{SB} + \dfrac{MC'}{SC} = \dfrac{S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}}{S_{ABC}}$

$$= \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1.$$

73. a) (h.125)

Trong mp(SAC) nối A' với C' cắt SO tại I. Trong mp(SBD) nối B' với I cắt SD tại D'. Khi đó D' chính là giao điểm của mp(P) với SD.



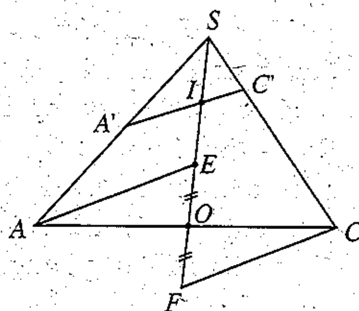
Hình 125

b) (h.126)

Trong mp(SAC), kẻ $AE \parallel A'C'$ cắt SO tại E ;
kẻ $CF \parallel A'C'$ cắt SO tại F. Ta có :

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SE}{SI} = \frac{SO - OE}{SI} \qquad (1)$$

$$\frac{SC}{SC'} = \frac{SF}{SI} = \frac{SO + OF}{SI}. \qquad (2)$$



Hình 126

Do O là trung điểm của AC và $AE \parallel CF$,
nên $OE = OF$.

Vậy từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{2SO}{SI}$. (3)

c) Chứng minh tương tự như câu b), ta có

$$\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{2SO}{SI}. \qquad (4)$$

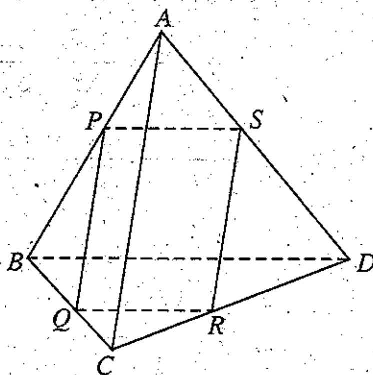
Từ (3) và (4), suy ra

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}.$$

74. (h.127)

a) $\left.\begin{array}{l} AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ABC) \\ (\alpha) \cap (ABC) = PQ \end{array}\right\} \Rightarrow PQ \parallel AC.$

$\left.\begin{array}{l} AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ACD) \\ (\alpha) \cap (ACD) = RS \end{array}\right\} \Rightarrow RS \parallel AC.$



Hình 127

Từ trên, suy ra $PQ \parallel RS$ ($\parallel AC$). (1)

Chứng minh tương tự, ta có

$PS \parallel QR$ ($\parallel BD$). (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $PQRS$ là hình bình hành.

b) Vì $PS \parallel BD \Rightarrow \dfrac{PS}{BD} = \dfrac{PA}{AB}$

nên $$PS = \frac{BD}{AB} \cdot PA. \quad (3)$$

Vì $PQ \parallel AC \Rightarrow \dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{PB}{AB}$

nên $$PQ = \frac{AC}{AB} \cdot PB. \quad (4)$$

Tứ giác $PQRS$ là hình thoi khi và chỉ khi $PS = PQ$

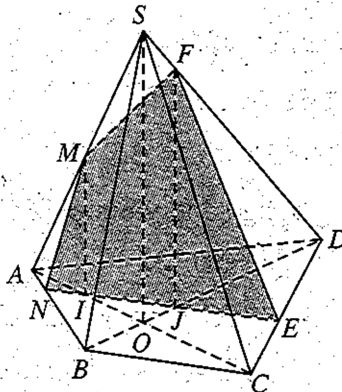
$$\Leftrightarrow \quad BD.PA = AC.PB$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BD}. \quad (5)$$

Vậy tứ giác $PQRS$ là hình thoi khi và chỉ khi mp(α) qua điểm P (được xác định bởi (5)) đồng thời song song với cả AC và BD.

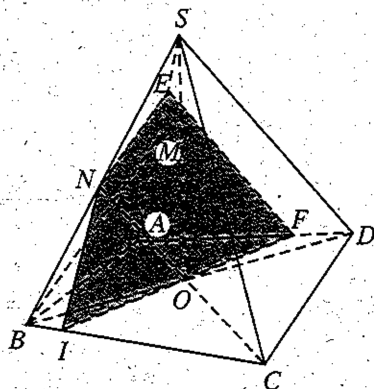
75. a) (h.128)

Qua M ta kẻ đường thẳng MI song song với SO cắt AC tại I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, CD, DB lần lượt tại N, E, J. Qua J kẻ đường thẳng song song với SO cắt SD tại F. Tứ giác $MNEF$ là thiết diện cần tìm.



Hình 128

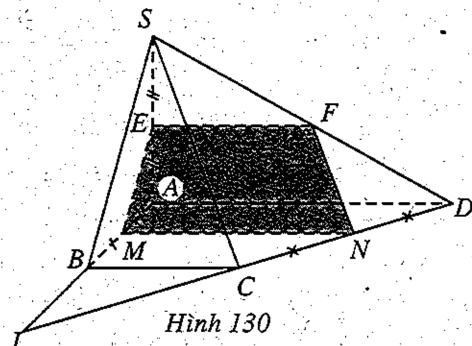
b) (h.129)



Hình 129

Trong mp(SBD), qua O kẻ đường thẳng song song với SD cắt cạnh SB tại N. Qua N kẻ đường thẳng song song với BM cắt SA tại E. Qua E kẻ đường thẳng song song với SD cắt AD tại F. Nối F với O cắt BC tại I. Tứ giác $NEFI$ là thiết diện cần tìm.

76. (h.130)



Hình 130

a) MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$, suy ra

$$\left.\begin{matrix} MN \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \parallel (SBC).$$

$$\left.\begin{matrix} MN \parallel (SBC) \\ ME \parallel (SBC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (MEN) \parallel (SBC).$$

b) Ta có

$EF \parallel AD \Rightarrow EF \parallel MN$.

$\Rightarrow EF \subset (MNE) \Rightarrow F \in (MNE)$.

Mặt khác $F \in SD$, do đó $F = (MNE) \cap SD$.

Thiết diện là hình thang $MNFE$.

c) Theo câu a), ta có $(SBC) \parallel (MNE)$

mặt khác $SC \subset (SBC)$.

Suy ra $SC \parallel (MNE)$.

Đường thẳng AF không song song với mp(SBC) vì nếu $AF \parallel (SBC)$ thì $AF \subset (MNE) \Rightarrow A \in (MNE)$ (vô lí).

d) Xét ba mặt phẳng (SAB), (SCD) và (MNE). Ta có :

$(SAB) \cap (SCD) = SJ$ (J là giao điểm của AB và CD)

$(SAB) \cap (MNE) = ME$

$(SCD) \cap (MNE) = NF$.

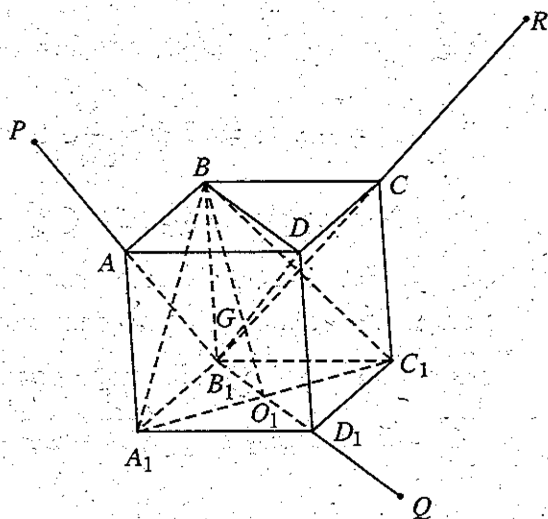
Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng SJ, ME, NF đồng quy. Vậy điểm I phải di động trên đường thẳng SJ (trừ những điểm trong của đoạn SJ).

77. (h.131)

a) Gọi O_1 là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1. Khi đó

$(A_1BC_1) \cap (BDD_1B_1) = BO_1$.

Gọi G là giao điểm của B_1D và BO_1 thì G chính là giao điểm của B_1D với mp(A_1BC_1). Dễ thấy $\Delta GBD \backsim \Delta GO_1B_1$, tỉ số đồng dạng là 2 (do $\frac{BD}{B_1O_1} = 2$).



Hình 131

Vậy $B_1G = \frac{1}{2}GD$

và $GO_1 = \frac{1}{2}GB$, suy ra G là trọng tâm tam giác A_1BC_1.

b) Dễ thấy $AC \parallel A_1C_1$, $D_1A \parallel C_1B \Rightarrow (D_1AC) \parallel (BA_1C_1)$.

Chứng minh tương tự như câu a), ta có trọng tâm G' của tam giác D_1AC nằm trên đường chéo DB_1 và $DG' = \frac{1}{2}G'B_1$. Từ đó và kết quả của câu a), suy ra G và G' chia đường chéo B_1D thành ba phần bằng nhau.

Vậy $$B_1G' = \frac{2}{3}B_1D.$$

c) Do A, D_1, C lần lượt là trung điểm của PB_1, QB_1, RB_1 nên

$$PQ \parallel AD_1,\ QR \parallel D_1C,\ RP \parallel CA.$$

Từ đó, suy ra $(PQR) \parallel (AD_1C)$.

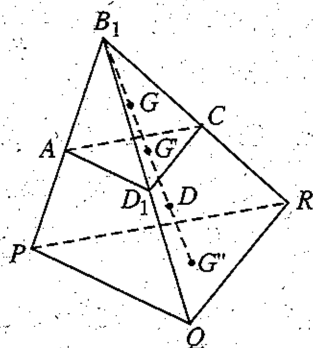
Mặt khác, theo câu b), ta có $(D_1AC) \parallel (BA_1C_1)$, nên $(PQR) \parallel (BA_1C_1)$.

d) (h.132)

Vì A, D_1, C lần lượt là trung điểm của B_1P, B_1Q, B_1R nên trọng tâm G'' của tam giác PQR phải nằm trên đường thẳng B_1G' và $B_1G'' = 2B_1G'$. Mặt khác $B_1G' = \frac{2}{3}B_1D$,

nên $B_1G'' = \frac{4}{3}B_1D \Rightarrow B_1D = \frac{3}{4}B_1G''$.

Vậy D là trọng tâm tứ diện B_1PQR.



Hình 132

Chú ý. Sau khi học vectơ trong không gian, ta có thể dùng phương pháp vectơ để giải bài toán này một cách ngắn gọn hơn bằng cách đặt $\overrightarrow{B_1A_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B_1B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{c}$ và chứng minh $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DR} = \vec{0}$.

Bài tập trắc nghiệm chương II

1. (C).	**2.** (C).	**3.** (D).	**4.** (B).
5. (D).	**6.** (C).	**7.** (C).	**8.** (B).
9. (D).	**10.** (D).	**11.** (B).	**12.** (C).
13. (B).	**14.** (D).		

Chương III VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

A - KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1. Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các vectơ

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa vectơ và các phép toán vectơ trong không gian cũng giống như trong mặt phẳng. Ngoài ra cần biết :

1. *Quy tắc hình hộp để cộng vectơ trong không gian.*

2. *Khái niệm và điều kiện đồng phẳng của ba vectơ, cụ thể :*

a) *Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gọi là đồng phẳng nếu ba đường thẳng chứa chúng cùng song song với một mặt phẳng.*

b) + *Điều kiện để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có các số m, n, p không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.*

+ *Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó, ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Hơn nữa, các số m, n là duy nhất.*

c) *Nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì với mỗi vectơ $\vec{d}$ đều có thể viết dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, với các số m, n, p xác định duy nhất.*

II - ĐỀ BÀI

1. Cho tứ diện $ABCD$, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$; Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}$, $\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$; Các điểm M, N lần lượt thuộc các đường thẳng CA và DC' sao cho $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{ND} = m\overrightarrow{NC'}$. Xác định m để các đường thẳng MN và BD' song song với nhau. Khi ấy, tính MN biết $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^\circ$ và $BA = a, BB' = b, BC = c$.

3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BB' và $A'C'$. Điểm K thuộc $B'C'$ sao cho $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) bất kì không đi qua S, cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1, D_1. Dùng phương pháp vectơ, chứng minh rằng

$$\frac{SA}{SA_1} + \frac{SC}{SC_1} = \frac{SB}{SB_1} + \frac{SD}{SD_1}.$$

5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng m, các góc tại A bằng 60° ($\widehat{BAD} = \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60^\circ$). Gọi P và Q là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A}, \overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{DC'}$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua trung điểm của cạnh BB'. Tính độ dài đoạn thẳng PQ.

6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi D_1, D_2, D_3 lần lượt là điểm đối xứng của điểm D' qua A, B', C. Chứng tỏ rằng B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là các điểm thuộc AD' và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}, \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ $(k \neq 0, k \neq 1)$.

a) Chứng minh rằng MN luôn song song với mp($A'BC$).

b) Khi đường thẳng MN song song với đường thẳng $A'C$, chứng tỏ rằng MN vuông góc với AD' và DB.

8. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính độ dài MN.

b) Tính góc giữa đường thẳng MN với các đường thẳng BC, AB và CD.

9. Cho hình tứ diện $ABCD$; I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD ; M là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{MA} = k_1\overrightarrow{MC}$; N là điểm thuộc BD sao cho

$\overrightarrow{NB} = k_2\overrightarrow{ND}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, M, N cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi $k_1 = k_2$.

10. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng.

a) Đặt $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{yOz} = \beta, \widehat{zOx} = \gamma$. Chứng minh rằng

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}.$$

b) Gọi Ox_1, Oy_1, Oz_1 lần lượt là các tia phân giác của các góc xOy, yOz, zOx. Chứng minh rằng nếu Ox_1 và Oy_1 vuông góc với nhau thì Oz_1 vuông góc với cả Ox_1 và Oy_1.

11. Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác vectơ – không.

a) Nếu có $\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c} = \vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có đồng phẳng không ?

b) Giả sử có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ trong đó m, n, p là các số thực. Với điều kiện nào của m, n, p thì ba vectơ đó đồng phẳng ?

12. Cho hai đường thẳng Δ, Δ_1 cắt ba mặt phẳng song song $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ lần lượt tại A, B, C và A_1, B_1, C_1. Với điểm O bất kì trong không gian, đặt $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{CC_1}$. Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, H, K, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh rằng

$$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2).$$

14. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$. Hãy xác định k để bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.

15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

§2, §3, §4. Hai đường thẳng vuông góc. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Hai mặt phẳng vuông góc

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. a) *Góc giữa hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2 *là góc giữa hai đường thẳng* a_1 *và* a_2 *cùng đi qua một điểm, lần lượt song song (hoặc trùng) với* Δ_1 và Δ_2.

Nếu $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ *lần lượt là vectơ chỉ phương của* Δ_1, Δ_2 *và* $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \alpha$ *thì góc giữa hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2 *bằng* α *hoặc* $180^\circ - \alpha$ *tuỳ theo* $\alpha \leq 90^\circ$ *hoặc* $\alpha > 90^\circ$.

b) *Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng* 90°.

$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$, *với* $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ *lần lượt là vectơ chỉ phương của* Δ_1 *và* Δ_2.

2. a) + *Đường thẳng gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng đó.*

+ *Để đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) điều kiện cần và đủ là a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng (P).*

+ *Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với đường thẳng a cho trước.*

Có duy nhất một đường thẳng Δ *đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước.*

Mặt phẳng đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và vuông góc với AB gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng đó.

Tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) *Định lí ba đường vuông góc*

Cho đường thẳng a có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là đường thẳng a'. Khi đó một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với a khi và chỉ khi nó vuông góc với a'.

c) *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng và hình chiếu của đường thẳng đó trên mặt phẳng (nếu hình chiếu đó là một điểm thì xem góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng* 90^o).

3. a) *Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.*

b) + *Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng* 90^o.

+ *Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc là một trong hai mặt phẳng đó chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại.*

+ $$\left.\begin{array}{l} a = (P) \cap (Q) \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (R).$$

II - ĐỀ BÀI

16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, cạnh bên $SA = AB$ và SA vuông góc với BC.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

b) Gọi I, J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho $IJ \parallel BD$. Chứng minh rằng góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J.

17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 60^o$, $\widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^o$.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với $A'D$ và AC' với $B'D$.

b) Tính diện tích các hình $A'B'CD$ và $ACC'A'$.

c) Tính góc giữa đường thẳng AC' và các đường thẳng AB, AD, AA'.

18. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng α. Gọi M là điểm bất kì thuộc cạnh AC, đặt $AM = x$ $(0 < x < AC)$. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với AB, CD.

a) Xác định vị trí điểm M để diện tích thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mp(P) đạt giá trị lớn nhất.

b) Chứng minh rằng chu vi thiết diện nêu trên không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi $AB = CD$.

19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác vuông tại A. Với điểm M bất kì thuộc cạnh AD (M khác A và D), xét mặt phẳng (α) đi qua điểm M và song song với SA, CD.

a) Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp(α) là hình gì ?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và b ; biết $AB = a$, $SA = b$, M là trung điểm của AD.

20. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc các đường thẳng BC và AD sao cho $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{ND}$ với k là số thực khác 0 cho trước. Đặt α là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BA}$; β là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$. Tìm mối liên hệ giữa AB và CD để $\alpha = \beta = 45^\circ$.

21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, H, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Hãy tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD trong các trường hợp sau :

a) Tứ giác $IJHK$ là hình thoi có đường chéo IH bằng $\sqrt{3}IJ$.

b) Tứ giác $IJHK$ là hình chữ nhật.

22. Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

a) Chứng minh rằng AD vuông góc với CB.

b) Gọi M và N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC.

23. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, BD. Cho biết $JK = \frac{5}{6}AB$, tính góc giữa đường thẳng CD với các đường thẳng IJ và AB.

24. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = AD = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c$. Đặt α là góc giữa BC và AD ; β là góc giữa AC và BD ; γ là góc giữa AB và CD. Chứng minh rằng trong ba số hạng $a^2\cos\alpha$, $b^2\cos\beta$, $c^2\cos\gamma$ có một số hạng bằng tổng hai số hạng còn lại.

25. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm I, J, K lần lượt thuộc các đường thẳng BC, AC, AD sao cho $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{KA} = k\overrightarrow{KD}$ trong đó k là số khác 0 cho trước. Chứng minh rằng :

a) $MN \perp IJ$ và $MN \perp JK$.

b) $AB \perp CD$.

26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SC$, $SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Chứng minh rằng $SO \perp$ mp($ABCD$).

b) Gọi d là giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD) ; d_1 là giao tuyến của mp(SBC) và mp(SAD). Chứng minh rằng $SO \perp$ mp(d, d_1).

27. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$, $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường chéo AC và BF vuông góc. Gọi CH và FK lần lượt là hai đường cao của hai tam giác BCE và ADF. Chứng minh rằng :

a) ACH và BFK là các tam giác vuông.

b) $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

28. a) Cho tứ diện $DABC$ có các cạnh bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của D trên mp(ABC) và I là trung điểm của DH. Chứng minh rằng tứ diện $IABC$ có IA, IB, IC đôi một vuông góc.

b) Cho tứ diện $IABC$ có $IA = IB = IC$ và IA, IB, IC đôi một vuông góc ; H là hình chiếu của I trên mp(ABC). Gọi D là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh tứ diện $DABC$ có các cạnh bằng nhau.

29. Cho hình chóp $S.ABC$ có SB vuông góc với mp(ABC), ABC là tam giác vuông tại A.

a) Chứng minh rằng ACS là tam giác vuông.

b) Tính SA, SB, SC biết rằng $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{ACS} = \beta$ và $BC = a$.

30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mp($ABCD$), $SA = a$ và $\widehat{ABC} = 60^{\circ}$.

a) Tính độ dài các cạnh SB, SC, SD.

b) Gọi I là trung điểm của SC. Chứng minh rằng $IB = ID$.

31. Chứng minh rằng nếu các cặp cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$ vuông góc với nhau từng đôi một thì trong bốn mặt của tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn (cả ba góc của nó đều nhọn).

32. Cho tứ diện $ABCD$, đáy là tam giác cân và $DA \perp mp(ABC)$, $AB = AC = a$, $BC = \frac{6}{5}a$. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ AH vuông góc với MD (H thuộc đường thẳng MD).

a) Chứng minh rằng $AH \perp mp(BCD)$.

b) Cho $AD = \frac{4}{5}a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DM.

c) Gọi G_1, G_2 lần lượt là các trọng tâm của tam giác ABC và tam giác DBC. Chứng minh rằng $G_1G_2 \perp mp(ABC)$.

33. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$.

a) Gọi D_1 là trung điểm của SD. Chứng minh rằng $AD_1 \perp (SCD)$.

b) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, M là điểm thay đổi trên SD. Chứng minh rằng hình chiếu của điểm O trên CM thuộc đường tròn cố định.

34. Trong mặt phẳng (P) cho hai điểm A và B phân biệt. Đoạn thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (P). Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) và đi qua điểm B, H là chân đường vuông góc kẻ từ điểm S đến Δ.

a) Chứng minh rằng điểm H thuộc một đường tròn cố định khi Δ thay đổi.

b) Gọi AK là đường cao của tam giác SAH ; AI là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh rằng điểm K thuộc đường tròn cố định khi Δ thay đổi ; Xác định vị trí của đường thẳng Δ để diện tích tam giác AKI đạt giá trị lớn nhất.

c) Hãy xác định vị trí của đường thẳng Δ để độ dài SH đạt giá trị lớn nhất hoặc bé nhất.

35. Cho tam giác ABC vuông tại B. Lấy điểm S bất kì trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) kẻ từ điểm A ($S \not\equiv A$). Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên SB và SC. Chứng minh rằng khi điểm S thay đổi thì

a) Giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (AB_1C_1) là đường thẳng cố định và là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ;

b) Đường thẳng B_1C_1 đi qua điểm cố định I và $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$.

36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác không cân và SA vuông góc với mp(ABC). Gọi AB_1, AC_1 lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAC.

a) Chứng minh rằng B_1C_1 và BC là hai đường thẳng cắt nhau.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BC và B_1C_1. Chứng minh rằng $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$.

37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, đường chéo $AC = 4a$, đường chéo $BD = 2a$; O là giao điểm của AC với BD và SO vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SO = h$. Một mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng SC tại điểm C_1. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và h để điểm C_1 nằm trong đoạn thẳng SC, C_1 khác S và khác C. Khi đó, tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mp(α).

38. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn ($\mathscr{C}$) đường kính $AC = 2R$. Gọi H là điểm thuộc AC ($0 < AH < 2R$). Một đường thẳng Δ đi qua H cắt đường tròn ($\mathscr{C}$) tại hai điểm B và D. Gọi S là điểm cố định sao cho SA vuông góc với (P), đặt $SA = h$. Một mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và vuông góc với SC cắt các đường thẳng SB, SC, SD, SH lần lượt tại các điểm B_1, C_1, D_1, H_1.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AB_1C_1D_1$ nội tiếp một đường tròn.

b) Đường thẳng Δ phải thoả mãn điều kiện gì để H_1 là trung điểm của B_1D_1 ?

c) Đường thẳng Δ phải thoả mãn điều kiện gì để $AB_1C_1D_1$ là hình vuông ?

39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy ($ABCD$) và $SA = a$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

b) Từ A kẻ $AB_1 \perp SB$, $AD_1 \perp SD$. Chứng tỏ rằng mp(AB_1D_1) $\perp SC$.

Gọi C_1 là giao điểm của SC với mp(AB_1D_1). Chứng tỏ rằng tứ giác $AB_1C_1D_1$ có hai đường chéo vuông góc và tính diện tích của tứ giác đó.

40. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) kẻ từ A. Với điểm M bất kì thuộc Δ, $M \not\equiv A$, gọi K là trực tâm của tam giác MBC và Δ_1 là đường thẳng đi qua K và vuông góc với mặt phẳng (MBC). Chứng minh rằng :

a) Δ_1 đi qua điểm cố định khi M thay đổi trên Δ.

b) Δ_1 cắt Δ tại điểm N và BM vuông góc với CN, CM vuông góc với BN. Xác định vị trí điểm M để độ dài MN đạt giá trị bé nhất.

41. Cho tứ diện $SABC$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau và có SA vuông góc với mp(ABC), $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$, $\widehat{ASB} = \alpha$.

a) Chứng minh rằng BC vuông góc với SB. Tìm điểm cách đều các điểm S, A, B, C.

b) Xác định α để hai mặt phẳng (SCA) và (SCB) tạo với nhau góc 60°.

42. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là điểm trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và mp(SAB) vuông góc với mp$(ABCD)$.

a) Chứng minh rằng mp$(SAB) \perp$ mp(SAD) và mp$(SAB) \perp$ mp(SBC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

c) Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh rằng

$$\text{mp}(SHC) \perp \text{mp}(SDI).$$

43. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với tâm O, $AB = a$, $BC = 2a$. Lấy điểm S trong không gian sao cho SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đặt $SO = h$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính góc giữa mp(SMN) với các mặt phẳng (SAB) và (SCD). Tìm hệ thức liên hệ giữa h và a để mp(SMN) vuông góc với các mặt phẳng (SAB), (SCD).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Tính h theo a để hai mặt phẳng đó vuông góc.

44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Tính :

a) Các góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy của hình chóp.

b) Góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt bên liên tiếp hoặc hai mặt bên đối diện của hình chóp.

45. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mp(DBC). Gọi AE, BF là hai đường cao của tam giác ABC ; H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và tam giác DBC. Chứng minh rằng :

a) mp$(ADE) \perp$ mp(ABC) và mp$(BFK) \perp$ mp(ABC) ;

b) $HK \perp$ mp(ABC).

46. Trong mặt phẳng (P), cho hình thoi $ABCD$ với $AB = a$, $AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi, ta lấy điểm S sao cho $SB = a$. Chứng minh rằng :

a) Tam giác ASC vuông.

b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SAD) vuông góc với nhau.

47. Cho tam giác cân ABC, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Xét hai tia cùng chiều Bt, Ct' và vuông góc với mp(ABC). Lấy điểm B' thuộc Bt, C' thuộc Ct' sao cho $BB' = 3CC'$ và $C' \not\equiv C$.

a) Chứng minh rằng giao tuyến của mp(ABC) và mp$(AB'C')$ cố định khi B', C' thay đổi.

b) Khi $BB' = a$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC), tính diện tích tam giác $AB'C'$.

48. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ và tạo với nhau góc α. Xét hai điểm M và N lần lượt thuộc (P) và (Q). Kẻ MI vuông góc với Δ, NJ vuông góc với Δ. Cho biết $MI = a$, $NJ = b$, $IJ = c$. Tính độ dài MN.

49. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ. Lấy hai điểm A, B cố định thuộc Δ sao cho $AB = a$. Gọi SAB là tam giác đều trong (P), $ABCD$ là hình vuông nằm trong (Q).

a) Tính góc giữa mặt phẳng (SCD) với các mặt phẳng (P) và (Q).

b) Gọi O_1 là giao điểm của hai đường thẳng B_1C và A_1D, ở đó A_1, B_1 tương ứng là các trung điểm của SA, SB. Gọi H_1 là giao điểm của đường cao SH của tam giác SAB với mp(A_1B_1CD). Chứng minh rằng SO_1 vuông góc với SA và CD. Tính góc giữa mp$(A_1B_1O_1)$ với các mặt phẳng (P) và (Q).

50. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a, đường cao $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AA_1 của tam giác ABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với AA_1. Đặt $AM = x$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(P).

b) Tính diện tích thiết diện vừa xác định theo a và x. Xác định vị trí điểm M để diện tích thiết diện đó đạt giá trị lớn nhất.

51. Trong mp(P), cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = b$, $BC = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Trong mặt phẳng qua EF và vuông góc với (P) vẽ nửa đường tròn đường kính EF. Gọi S là điểm bất kì trên nửa đường tròn đó.

a) Chứng minh rằng mp(SEF) vuông góc với hai mặt phẳng (SAD), (SBC) và mp(SAD) vuông góc với mp(SBC).

b) Gọi H', K' lần lượt là hình chiếu của các trực tâm H và K của các tam giác SAD và SBC xuống (P). Chứng minh rằng $HH'.KK'$ không phụ thuộc vào vị trí điểm S.

52. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC' và $A'B$.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, BC, DD'. Chứng minh rằng AC' vuông góc với mp(MNP).

53. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng h. Điểm M thuộc đoạn AB' sao cho $\frac{MA}{MB'} = \frac{5}{4}$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BC'.

b) Một mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với các đường thẳng $A'C$ và BC' cắt đường thẳng CC' tại C_1, tính tỉ số $\frac{C_1C}{C_1C'}$.

54. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Xét tứ diện $AB'CD'$. Cắt tứ diện đó bằng mặt phẳng đi qua tâm của hình lập phương và song song với mp(ABC). Tính diện tích thiết diện thu được. Hãy xét kết quả của bài toán khi $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật với ba kích thước là a, b, c.

55. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi C_1 là trung điểm của CC'.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng C_1B và $A'B'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (C_1AB) và (ABC).

b) Chứng minh rằng hình chóp $C_1.ABB'A'$ là hình chóp tứ giác đều.

c) Một mặt phẳng (P) chứa cạnh AB, tạo với mặt phẳng đáy (ABC) góc φ và cắt hình lăng trụ đã cho theo hình có diện tích khác không. Tính diện tích thiết diện đó theo a và φ.

§5. Khoảng cách

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (hoặc một đường thẳng) là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên mặt phẳng (hoặc trên đường thẳng).*

2. *Khoảng cách từ đường thẳng a đến mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P).*

3. *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

4. + *Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đường thẳng cắt cả hai đường thẳng và vuông góc với hai đường thẳng đó.*

Khi hai đường thẳng vuông góc với nhau và chéo nhau thì ta thường tìm đường vuông góc chung của chúng như sau :

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng thứ nhất và vuông góc với đường thẳng thứ hai tại điểm I. Đường vuông góc chung của chúng là đường thẳng đi qua I nằm trong (P) và vuông góc với đường thẳng thứ nhất.

+ *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng :*

• *Độ dài của đoạn vuông góc chung IJ của a và b, trong đó I và J lần lượt là các giao điểm của đường vuông góc chung đó với a và b.*

• *Khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.*

• *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.*

II - ĐỀ BÀI

56. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = BD = AC = AD$; $AB = a$, $CD = a\sqrt{3}$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD, $IJ = a$.

a) Chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Tính khoảng cách từ điểm cách đều bốn đỉnh A, B, C, D đến mỗi đỉnh đó.

57. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở C, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AC = a$, $BC = b$, $SA = h$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và SB.

a) Tính độ dài MN.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h để MN là đường vuông góc chung của AC và SB.

58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng a.

a) Chứng minh rằng SAC là tam giác vuông.

b) Tính đường cao SH của hình chóp đã cho.

59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Tính :

a) Khoảng cách từ điểm S đến mp(A_1CD) trong đó A_1 là trung điểm của SA ;

b) Khoảng cách giữa AC và SD.

60. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{A} = 60^\circ$, góc của đường chéo $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60°.

a) Tính đường cao của hình hộp đó.

b) Tìm đường vuông góc chung của $A'C$ và BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S và mp(SAB) vuông góc với mp($ABCD$), cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy góc α. Tính :

a) Chiều cao của hình chóp $S.ABCD$;

b) Khoảng cách từ chân đường cao hình chóp đến mặt phẳng (SCD) ;

c) Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng trung trực của cạnh BC.

62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $\widehat{A} = 120^\circ$, $BD = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là 60°. Tính :

a) Đường cao của hình chóp.

b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCB).

63. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $CA = b$, $CB = a$, cạnh $SA = h$ vuông góc với đáy. Gọi D là trung điểm của cạnh AB. Tính :

a) Góc giữa hai đường thẳng AC và SD ;

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD ;

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD.

64. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn ($\mathscr{C}$) đường kính $AB = 2R$; C là điểm bất kì thuộc đường tròn (C không trùng với A và B). S là điểm trong không

gian sao cho SA vuông góc với (P) và $SA = h$ (h cho trước và $h < 2R$). Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và SB. Hãy xác định vị trí điểm C trên đường tròn để IJ là đường vuông góc chung của AC và SB. Khi đó, tính khoảng cách từ điểm A đến mp(SBC).

65. a) Hai mặt ABC và ABD của hình tứ diện $ABCD$ là những tam giác có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD.

b) Bốn mặt của hình tứ diện $ABCD$ có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau, nghĩa là $BC = AD$, $AC = BD$, $AB = CD$.

66. Trên cạnh AD của hình vuông $ABCD$ cạnh a, ta lấy điểm M với $AM = x$ ($0 < x < AD$) và trên nửa đường thẳng At vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$) lấy điểm S sao cho $AS = y$.

a) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

b) Gọi I là trung điểm của SC và H là hình chiếu của I trên CM. Chứng minh rằng điểm H thuộc đường tròn cố định khi M chạy trên AD và S chạy trên At.

67. Cho ABC là tam giác đều cạnh a. Trên đường thẳng At vuông góc với mp(ABC) lấy điểm S với $AS = b$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, b.

b) Hz là đường thẳng đi qua trực tâm H của tam giác SBC và vuông góc với mp(SBC). Chứng minh rằng khi S di động trên At thì đường thẳng Hz luôn đi qua một điểm cố định.

68. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$.

b) Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh $A'B'$, BC, DD' sao cho $A'M = BN = DP$. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác MNP luôn thuộc đường thẳng cố định khi M, N, P thay đổi.

69. Đáy của hình chóp $A.BCD$ là tam giác đều. Đường cao của hình chóp kẻ từ đỉnh A đi qua trung điểm H của cạnh CD. Cắt hình chóp đó bởi mặt phẳng song song với AB và CD và cách đỉnh B một khoảng bằng d. Tính diện tích thiết diện thu được, biết cạnh của tam giác đều BCD là a và $AB = a\sqrt{2}$.

70. Cắt hình lập phương bằng một mặt phẳng (P) đi qua một đường chéo của hình lập phương. Phải chọn (P) như thế nào để thiết diện thu được có diện tích nhỏ nhất ?

Bài tập ôn tập chương III

71. Cho M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, A_1D_1 của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a) Xác định giao điểm P và Q của mặt phẳng (CMN) với các đường thẳng B_1C_1 và DB_1.

b) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong đó $\vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{AD}, \vec{a} = \overrightarrow{AA_1}$.

72. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các cạnh bên AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AA_1}{AA'} = \dfrac{B'B_1}{BB'} = \dfrac{C'C_1}{CC'} = \dfrac{3}{4}$. Trên các đoạn thẳng CA_1 và $A'B_1$ lần lượt lấy các điểm I, J sao cho $IJ \parallel B'C_1$. Tính tỉ số $\dfrac{IJ}{B'C_1}$.

73. Cho M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD của tứ diện $ABCD$; P là điểm thuộc đường thẳng AD sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, k là số cho trước ($k \neq 1$). Xác định điểm Q thuộc đường thẳng BC sao cho PQ và MN cắt nhau. Khi đó, hãy tính tỉ số $\dfrac{QB}{QC}$.

74. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{A_1A} = k\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{B_1B} = k\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{C_1C} = k\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A}$. Với giá trị nào của k thì bốn điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng ?

75. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng :

a) Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật thì với mọi điểm M trong không gian ta luôn có $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

b) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trong không gian. Điều ngược lại có đúng không ?

76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân với các cạnh đáy $AB = 2a$, $CD = a$ và hai cạnh bên $BC = AD = a$, SO vuông góc với mp(ABC) trong đó O là trung điểm của AB, $SO = a$.

a) Chứng minh rằng điểm cách đều các điểm S, A, B, C, D thuộc đường thẳng SO. Tính khoảng cách từ điểm đó đến mỗi đỉnh của hình chóp.

b) Tính góc giữa đường thẳng SO và mp(SCD).

77. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $SA = SB = SC = a$ và cùng tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60°. Một mặt phẳng song song với hai cạnh chéo nhau của hình chóp và cắt hình chóp đó theo thiết diện là hình vuông. Tính diện tích thiết diện.

78. Cho tam giác đều ABC có chiều cao $AH = 5a$. Điểm O thuộc đoạn thẳng AH sao cho $AO = a$. Điểm S trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O và $SO = 2a$.

a) Chứng minh AS và CS vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

b) Gọi I là trung điểm của OH ; (α) là mặt phẳng đi qua điểm I và vuông góc với AH. Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi (α) là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

79. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. $AB = c$, $BC = a$, cạnh bên $AA' = h$, trong đó $h^2 > a^2 + c^2$. Một mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với CA'.

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ khi cắt bởi mp(P).

b) Tính diện tích thiết diện.

80. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a.

a) Tính góc tạo bởi mặt phẳng chứa mặt bên và mặt đáy. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng chứa hai mặt bên liên tiếp nếu chiều cao hình chóp bằng a.

b) Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm A, song song với CD và vuông góc với mp(SCD), chia tam giác SCD thành hai phần với tỉ số diện tích bằng $\frac{1}{8}$ (phần thứ nhất chứa đỉnh). Tính diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

81. Cho hai nửa mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B cố định với $AB = a\sqrt{2}$ (a là độ dài cho trước). Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với Δ và ở trong (P) lấy điểm M khác A. Đặt $AM = m$. Trên nửa đường thẳng By vuông góc với Δ và trong (Q) lấy điểm N sao cho $BN = \dfrac{a^2}{m}$.

a) Chứng minh các mặt của tứ diện $ABMN$ là các tam giác vuông.

b) Với giá trị nào của m thì MN có độ dài bé nhất ? Tính giá trị đó.

c) Chứng minh rằng chân mỗi đường cao của tứ diện đó xuất phát từ A và B nằm trên đường tròn cố định khi M thay đổi.

82. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng AD', điểm N thuộc đoạn thẳng BD sao cho

$$AM = DN = x\ (0 < x < a\sqrt{2}).$$

a) Tìm x để đoạn thẳng MN có độ dài ngắn nhất.

b) Khi MN ngắn nhất, hãy chứng tỏ MN là đường vuông góc chung của AD' và DB, đồng thời $MN // A'C$.

83. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi I là điểm thuộc cạnh AB ; đặt $AI = x$ $(0 < x < a)$.

a) Khi góc giữa hai đường thẳng AC' và DI bằng 60°, hãy xác định vị trí của điểm I.

b) Tính theo a và x diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(B'DI)$. Tìm x để diện tích ấy là nhỏ nhất.

c) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(B'DI)$ theo a và x.

84. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$. Gọi S là điểm sao cho SA vuông góc với mp(ABC) và $SA = h$ $(h > 0)$. Trên cạnh CD lấy điểm M bất kì, đặt $CM = x$, $(0 \le x \le a)$.

a) Tính diện tích tam giác SBM theo a, b, h, x.

b) Tính khoảng cách từ điểm A đến mp(SBM) khi M là trung điểm của CD.

c) Gọi hình chiếu của điểm A và điểm D trên mp(SBM) lần lượt là A_1 và D_1. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên CD thì các điểm A_1 và D_1 mỗi điểm thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của mỗi đường tròn đó.

85. Cho ABC là tam giác cân có $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Điểm S thay đổi trong không gian nhưng luôn ở về một phía của mặt phẳng (ABC) và $AS = a$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$.

a) Gọi H là hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng H thuộc đường thẳng cố định và S thuộc đường tròn cố định, tính bán kính đường tròn đó.

b) Chứng minh rằng khi độ dài SH đạt giá trị lớn nhất thì hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và khi đó hãy tính độ dài SC.

c) Khi SBC là tam giác vuông tại S, hãy tính góc giữa hai đường thẳng SA với AC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

86. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{6}$. Xét đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với BD. Gọi (P) là mặt phẳng qua Δ và điểm C'.

a) Thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi mp(P) là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

b) Tính góc giữa mp(P) và mp$(ABCD)$.

87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = b$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AS = 2a$. Gọi M là điểm bất kì trên AS, đặt $AM = x$ $(0 \le x \le 2a)$.

a) Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp(MBC) là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

b) Tính khoảng cách từ điểm S đến mp(MBC) ứng với mỗi vị trí của M.

88. Cho hình chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đáy lần lượt là a, b $(a > b)$. Góc giữa đường thẳng chứa đường cao và mặt phẳng chứa mặt bên là α. Tính :

a) Chiều cao, trung đoạn, cạnh bên của hình chóp cụt đó (đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đáy thuộc một mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp cụt đều) ;

b) Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp cụt đó.

89. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đường cao bằng h. Góc giữa mặt phẳng chứa mặt bên và mặt đáy bằng α. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng β. Tính :

a) Cạnh đáy, trung đoạn của hình chóp cụt ;

b) Diện tích xung quanh của hình chóp cụt đó.

Bài tập trắc nghiệm chương III

1. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

(A) Ba vectơ đồng phẳng là ba vectơ cùng nằm trong một mặt phẳng ;

(B) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số duy nhất ;

(C) Ba vectơ không đồng phẳng khi có $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là vectơ bất kì ;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

2. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau ?

(A) Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó ;

(B) Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn ;

(C) Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c) ;

(D) Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

3. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau ?

(A) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho ;

(B) Góc giữa đường thẳng a và mp(P) bằng góc giữa đường thẳng b và mp(P) khi a và b song song (hoặc a trùng với b) ;

(C) Góc giữa đường thẳng a và mp(P) bằng góc giữa đường thẳng a và mp(Q) thì mp(P) song song với mp(Q) ;

(D) Góc giữa đường thẳng a và mp(P) bằng góc giữa đường thẳng b và mp(P) thì a song song với b.

4. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau ?

(A) Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn ;

(B) Góc giữa mp(P) và mp(Q) bằng góc giữa mp(P) và mp(R) khi (Q) song song với (R) (hoặc (Q) trùng với (R)) ;

(C) Góc giữa mp(P) và mp(Q) bằng góc giữa mp(P) và mp(R) thì (Q) song song với (R) ;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều đúng.

5. Cho mp(P) và hai điểm A, B không nằm trong (P). Đặt $d_1 = d(A; (P))$ và $d_2 = d(B; (P))$. Trong các kết luận sau đây, kết luận nào đúng ?

(A) $\dfrac{d_1}{d_2} = 1$ khi và chỉ khi AB song song với (P) ;

(B) $\dfrac{d_1}{d_2} \neq 1$ khi và chỉ khi đoạn thẳng AB cắt (P) ;

(C) Nếu $\dfrac{d_1}{d_2} \neq 1$ thì đoạn thẳng AB cắt (P) ;

(D) Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại điểm I thì $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{d_1}{d_2}$.

6. Cho tứ diện $ABCD$, kí hiệu h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng cách từ mỗi đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đối diện với đỉnh đó của hình tứ diện. Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau ?

(A) $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ chỉ xảy ra khi tứ diện đó là tứ diện đều ;

(B) $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ khi các mặt của tứ diện đó tương đương ;

(C) Có tứ diện mà một trong bốn khoảng cách bằng độ dài một cạnh của tứ diện ;

(D) Có tứ diện mà hai trong bốn khoảng cách bằng hai độ dài hai cạnh của tứ diện.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mp(SAB) là α, khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?

(A) $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$; (B) $\tan\alpha = \sqrt{2}$;

(C) $\tan\alpha = 1$; (D) $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?

(A) a ; (B) $a\sqrt{2}$;

(C) $a\sqrt{3}$; (D) $2a$.

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến mp(SAB) nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (B) a ;

(C) $a\sqrt{2}$; (D) $2a$.

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó SA, AB, BC đôi một vuông góc và $SA = AB = BC = 1$. Khoảng cách giữa hai điểm S và C nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?

(A) $\sqrt{2}$; (B) $\sqrt{3}$;

(C) 2 ; (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Góc giữa mp(SCD) và mp($ABCD$) là α, khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?

(A) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;   (B) $\tan\alpha = 1$;

(C) $\tan\alpha = \sqrt{2}$;   (D) $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

12. Cho tứ diện $ABCD$, có $DA = DB = DC$ và $\widehat{BDC} = 60°$, $\widehat{ADC} = 90°$, $\widehat{ADB} = 120°$. Trong các mặt của tứ diện đó :

(A) Tam giác ABD có diện tích lớn nhất ;

(B) Tam giác ACD có diện tích lớn nhất ;

(C) Tam giác BCD có diện tích lớn nhất ;

(D) Tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

13. Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối diện vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện của tứ diện. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Thiết diện là hình thang ;

(B) Thiết diện là hình bình hành ;

(C) Thiết diện là hình chữ nhật ;

(D) Thiết diện là hình vuông.

14. Cho tứ diện có hai cặp cạnh đối diện vuông góc. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn ;

(B) Tứ diện có ít nhất hai mặt là tam giác nhọn ;

(C) Tứ diện có ít nhất ba mặt là tam giác nhọn ;

(D) Tứ diện có cả bốn mặt là tam giác nhọn.

15. Cho tứ diện $ABCD$. Xét hình hộp nhận các cạnh của tứ diện làm các đường chéo của các mặt của hình hộp (xem bài tập 50, chương II). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

(A) Hình hộp đó là hình hộp thoi (tất cả các mặt là hình thoi) khi tứ diện đó có hai cặp cạnh đối diện vuông góc ;

(B) Hình hộp đó là hình hộp chữ nhật khi tứ diện đó có các cặp cạnh đối diện bằng nhau ;

(C) Hình hộp đó là hình lập phương khi tứ diện đó là tứ diện đều.

(D) Chỉ có một trong ba mệnh đề trên là đúng.

16. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với đường cao SH. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi các cạnh bên bằng nhau ;

(B) H trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy bằng nhau ;

(C) H là trung điểm của một cạnh đáy khi hình chóp đó có một mặt bên vuông góc với mặt đáy ;

(D) H thuộc cạnh của đáy thì hình chóp đó có một mặt bên vuông góc với đáy.

17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét mp($A'BD$). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Góc giữa mp($A'BD$) và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau ;

(B) Góc giữa mp($A'BD$) và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau và phụ thuộc vào kích thước của hình lập phương ;

(C) Góc giữa mp($A'BD$) và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng α mà $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

18. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có một cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Xét bốn mặt phẳng chứa bốn mặt bên và mặt phẳng chứa mặt đáy. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Có hai cặp mặt phẳng vuông góc với nhau ;

(B) Có ba cặp mặt phẳng vuông góc với nhau ;

(C) Có bốn cặp mặt phẳng vuông góc với nhau ;

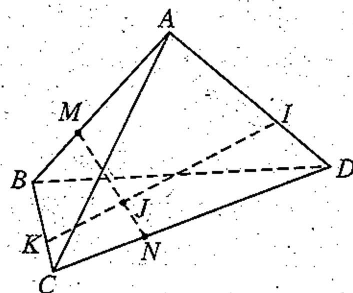
(D) Có năm cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

§1. Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các vectơ

1. (h.133). *Cách 1.*

Ta có $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MJ}$ (1)

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NJ}.$ (2)



Hình 133

Từ (2) ta có

$$k\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{ID} + k\overrightarrow{DN} + k\overrightarrow{NJ}$$

hay $k\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MJ}.$ (3)

Từ (1), (3) ta có

$$(1-k)\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{DN}$$

hay $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{AM} - \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{DN}.$

Chứng minh tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{JK} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{NC}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$

nên $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{2}{1-k}\overrightarrow{MB} - \dfrac{2k}{1-k}\overrightarrow{NC}.$

Từ đó, ta có $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JK}.$

Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Cách 2.

Vì $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$

nên với điểm O bất kì thì $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}.$

Tương tự $\overrightarrow{ON} = \dfrac{\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}}{3}$; $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OD}}{1-k}$; $\overrightarrow{OK} = \dfrac{\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}$

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{ON}}{1-k}.$$

Từ đó, ta có $$\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OD} - 2k\overrightarrow{OC})$$

$$= \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{3}[(1-k)\overrightarrow{OI} + 2(1-k)\overrightarrow{OK}]$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OK}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}.$$

Mặt khác $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

2. (h.134)

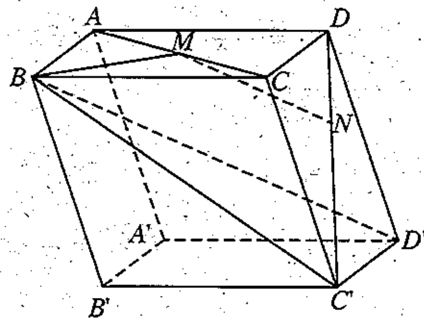
Xác định m :

Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BB'} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = \vec{c}$ thì

$$\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Do $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$ nên

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BC} - m\overrightarrow{BA}}{1-m} = \frac{\vec{c} - m\vec{a}}{1-m}.$$



Hình 134

Tương tự, ta có

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BD} - m\overrightarrow{BC'}}{1-m} = \frac{\vec{a} + \vec{c} - m(\vec{b} + \vec{c})}{1-m}$$

$$= \frac{1}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} + \vec{c}.$$

Từ đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$

$$= \frac{1+m}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} - \frac{m}{1-m}\vec{c}.$$

Do AC, BD' chéo nhau và DC', BD' chéo nhau nên

$$MN \,//\, BD' \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}.$$

Mặt khác $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên điều ấy xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{1+m}{1-m} = k \\ -\dfrac{m}{1-m} = k \\ -\dfrac{m}{1-m} = k. \end{cases}$$

Suy ra $1 + m = -m \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Từ đó, ta có $k = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $m = -\dfrac{1}{2}$ thì $MN // BD'$.

Tính MN :

Khi ấy $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

do đó $\overrightarrow{MN}^2 = \dfrac{1}{9}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + 2\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c})$

hay $MN^2 = \dfrac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)$

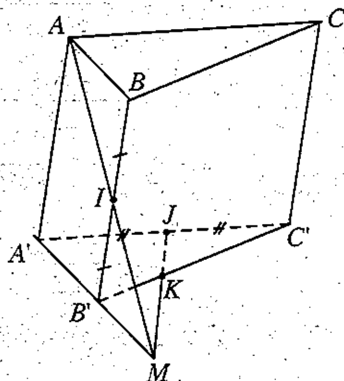
tức là $MN = \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$.

3. (h.135)

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Ta có

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'})$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{b})$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b}) \ ; \qquad (1)$$
$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'})$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a} + \vec{c})$$
$$= \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{c}). \qquad (2)$$



Hình 135

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{AC'} + 2\overrightarrow{AB'}}{3}$$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{c} + 2(\vec{a} + \vec{b})}{3}$$

$$= \frac{3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{3}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ})$.

Vậy $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}$ đồng phẳng, tức là các điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

Chú ý. Có thể chứng minh các điểm A, I, J, K thuộc một mặt phẳng bằng cách chứng minh AI và JK cắt nhau tại M (xem hình 135).

4. (h.136)

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

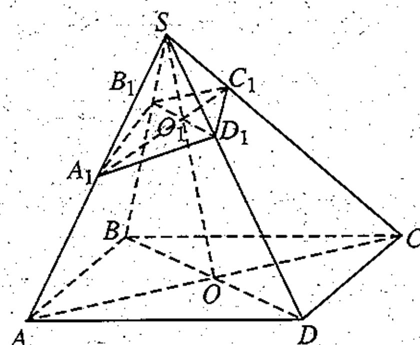
$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$$

hay $\quad \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$.

Đặt $\quad \overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB_1}$,

$\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC_1}$, $\overrightarrow{SD} = d\overrightarrow{SD_1}$

(với a, b, c, d là các số lớn hơn 1).



Hình 136

Khi đó $\quad \dfrac{SA}{SA_1} + \dfrac{SC}{SC_1} = a + c$

$$\frac{SB}{SB_1} + \frac{SD}{SD_1} = b + d$$

và $\quad \overrightarrow{SD_1} = \dfrac{1}{d} \cdot \overrightarrow{SD} = \dfrac{1}{d}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})$

$$= \frac{1}{d}(a\overrightarrow{SA_1} + c\overrightarrow{SC_1} - b\overrightarrow{SB_1})$$

$$= \frac{a}{d} \cdot \overrightarrow{SA_1} + \frac{c}{d} \cdot \overrightarrow{SC_1} - \frac{b}{d} \cdot \overrightarrow{SB_1}.$$

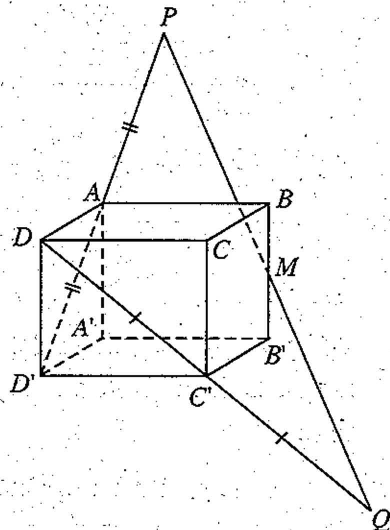
Mặt khác, các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 thuộc mặt phẳng, nên từ đẳng thức đó suy ra

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} - \frac{b}{d} = 1,$$

tức là $a + c = b + d$.

Như vậy $\dfrac{SA}{SA_1} + \dfrac{SC}{SC_1} = \dfrac{SB}{SB_1} + \dfrac{SD}{SD_1}$.

5. (h.137)



Hình 137

• Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = \dfrac{1}{2}m^2$

và $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = m^2$.

Gọi M là trung điểm của BB' thì

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}.$$

Do $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A} = -\vec{a} - \vec{c}$

nên $\overrightarrow{MP} = -\dfrac{\vec{a}}{2} - \vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$.

$$= -\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'Q}$

$$= \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DC'}$$

$$= \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Như vậy $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MQ}$, tức là ba điểm P, M, Q thẳng hàng hay đường thẳng PQ đi qua trung điểm của cạnh BB'.

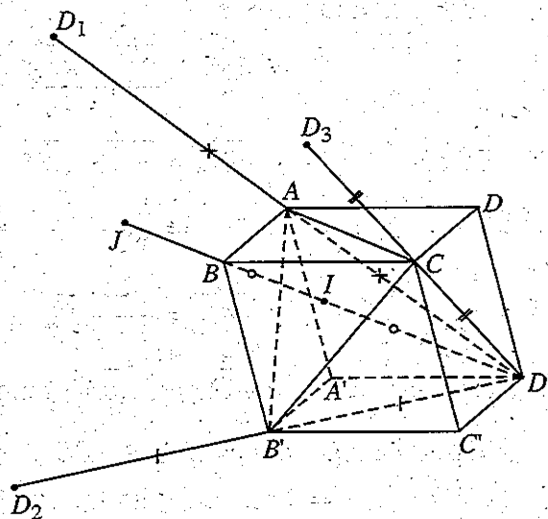
• Ta có $PQ^2 = \overrightarrow{PQ}^2 = 4\overrightarrow{MP}^2$

$$= 4\left(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = 4\left(\frac{9}{4}\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3\vec{a}.\vec{b} + 3\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c}\right)$$

$$= 4\left(\frac{9}{4}m^2 + m^2 + m^2 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{2}m^2 + m^2\right)$$

$$= 4 \cdot \frac{33}{4}m^2 = 33m^2 \Rightarrow PQ = m\sqrt{33}.$$

6. (h.138)



Hình 138

Cách 1. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Từ giả thiết, ta có

$\overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{BD_1} = 2\overrightarrow{BA} = -2\vec{b}$

mà $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Vậy $\overrightarrow{BD_1} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

Lập luận tương tự như trên, ta có $\overrightarrow{BD_2} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

và $\overrightarrow{BD_3} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Vậy $\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{BD_3} + \overrightarrow{BD'} = \vec{0}$.

Điều này chứng tỏ B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

Cách 2.

Gọi I là giao điểm của BD' và mp$(AB'C)$ thì $D'I = 2IB$.

Gọi J là giao điểm của BD' với mp$(D_1D_2D_3)$, do D_1, D_2, D_3 là các điểm đối xứng của D' lần lượt qua A, B', C nên $IJ = ID'$ hay $D'B = \dfrac{3}{4}D'J$.

Mặt khác I là trọng tâm tam giác $AB'C$ nên J là trọng tâm tam giác $D_1D_2D_3$. Từ đó B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

7. (h.139)

a) Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Khi đó, ta có

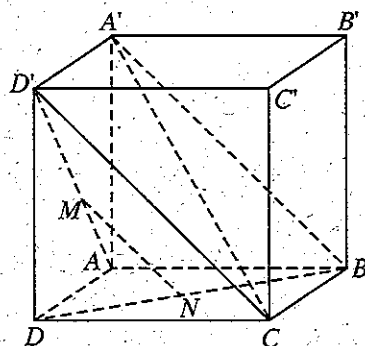
$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 0$$

và $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2$.

Vì $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$

nên $\overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD'})$.

Vậy $\overrightarrow{AM} = \dfrac{k}{k-1}(\vec{a} + \vec{c})$.



Hình 139

Tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AD} - k\overrightarrow{AB}}{1-k} = -\frac{k}{1-k}\vec{b} + \frac{1}{1-k}\vec{c}.$$

Từ đó $\qquad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$

$$= \frac{1+k}{1-k}\vec{c} + \frac{k}{1-k}(\vec{a} - \vec{b})$$

hay $\qquad \overrightarrow{MN} = \frac{1+k}{1-k}\overrightarrow{BC} + \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA'}.$

Như vậy ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA'}$ đồng phẳng.

Mặt khác AD', DB cắt mp($A'BCD'$) ; các điểm M, N lần lượt thuộc AD', DB với $k \neq 0$, $k \neq 1$ nên MN không thuộc mp($A'BC$). Vậy MN song song với mp($A'BC$).

b) Ta có $\overrightarrow{A'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $A'C$, AD' chéo nhau ; $A'C$, BD chéo nhau mà $M \in AD'$, $N \in DB$. Do đó, đường thẳng MN song song với đường thẳng $A'C$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{A'C}$, tức là

$$\frac{k}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b} + \frac{1+k}{1-k}\vec{c} = -m\vec{a} + m\vec{b} + m\vec{c}.$$

Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{k}{1-k} = -m \\ -\dfrac{k}{1-k} = m \\ \dfrac{1+k}{1-k} = m. \end{cases}$$

Suy ra $\qquad -k = 1 + k \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$

Vậy khi $k = -\frac{1}{2}$ thì MN song song với $A'C$.

Khi đó $\qquad \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}).$

Mặt khác $\overrightarrow{AD'} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{c}$.

Vậy $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = -\frac{1}{3}(\vec{a}^2 - \vec{c}^2) = 0$

$$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{DB} = -\frac{1}{3}(-\vec{b}^2 + \vec{c}^2) = 0.$$

Điều này khẳng định MN vuông góc với AD' và DB.

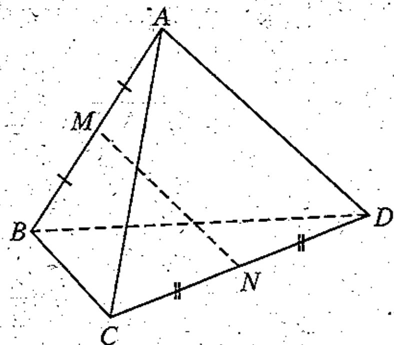
8. (h.140)

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Khi đó, ta có

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{c} = \vec{c}\,.\,\vec{a} = \frac{1}{2}m^2$$

và $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = m^2$.



Hình 140

a) Vì M, N là trung điểm của AB và CD nên

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})$.

Vậy $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{c} - 2\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{b}.\vec{c})$

$$= \frac{1}{4}(m^2 + m^2 + m^2 + m^2 - m^2 - m^2) = \frac{2m^2}{4}.$$

Tức là $MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}).\vec{b}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} - \vec{b}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} - m^2\right) = 0$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AB bằng 90°.

Ta có

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c} - \vec{c}^2 + \vec{b}.\vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - m^2 + \frac{m^2}{2}\right) = 0.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và CD bằng 90°.

Ta có

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(-\vec{b} + \vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}(-\vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{c} + \vec{b}^2 + \vec{a}.\vec{c} + \vec{c}^2 - \vec{b}.\vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} + m^2 + \frac{m^2}{2} + m^2 - \frac{m^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m^2.$$

Tức là $\quad |\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{BC}|\cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}m^2.$

Từ đó $\quad \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\frac{m^2}{2}}{m.\frac{m\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC bằng 45°.

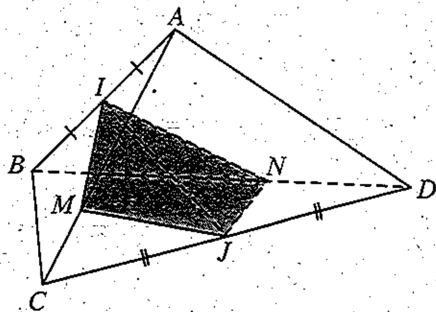
9. (h.141)

Vì $\overrightarrow{MA} = k_1\overrightarrow{MC}$

nên $\overrightarrow{IM} = \dfrac{\overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC}}{1 - k_1}$.

Tương tự, ta có

$$\overrightarrow{IN} = \frac{\overrightarrow{IB} - k_2\overrightarrow{ID}}{1 - k_2} = \frac{-\overrightarrow{IA} - k_2\overrightarrow{ID}}{1 - k_2}.$$



Hình 141

Mặt khác $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$.

Để các điểm I, J, M, N thuộc một mặt phẳng, điều kiện cần và đủ là ba vectơ $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}$ đồng phẳng. Rõ ràng là $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IJ}$ không cùng phương nên điều khẳng định $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}$ đồng phẳng tương đương với

$$\overrightarrow{IM} = p\overrightarrow{IN} + q\overrightarrow{IJ}$$

hay $$\frac{\overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC}}{1-k_1} = p.\frac{-\overrightarrow{IA} - k_2\overrightarrow{ID}}{1-k_2} + \frac{q}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-k_1} + \frac{p}{1-k_2}\right)\overrightarrow{IA} - \left(\frac{k_1}{1-k_1} + \frac{q}{2}\right)\overrightarrow{IC} + \left(\frac{pk_2}{1-k_2} - \frac{q}{2}\right)\overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

Do $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}$ không đồng phẳng nên đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-k_1} + \dfrac{p}{1-k_2} = 0 \\ \dfrac{k_1}{1-k_1} + \dfrac{q}{2} = 0 \\ \dfrac{pk_2}{1-k_2} - \dfrac{q}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{k_1}{1-k_1} = -\frac{pk_2}{1-k_2} = \frac{k_2}{1-k_1}$$

hay $k_1 = k_2$.

10. Lấy E_1, E_2, E_3 lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho $OE_1 = OE_2 = OE_3$.

Đặt $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$.

a) Do ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng nên

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 > 0,$$

tức là $$\vec{e}_1^{\,2} + \vec{e}_2^{\,2} + \vec{e}_3^{\,2} + 2(\vec{e}_1.\vec{e}_2 + \vec{e}_2.\vec{e}_3 + \vec{e}_3.\vec{e}_1) > 0$$

$$\Leftrightarrow 3OE_1^2 + 2OE_1^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) > 0.$$

Vậy $$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}.$$

b) Dễ thấy $\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} \,//\, Ox_1$

$\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3} \,//\, Oy_1$

$\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1} \,//\, Oz_1.$

$Ox_1 \perp Oy_1 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3}) = 0$

hay $\overrightarrow{OE_2}^2 + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_2}.\overrightarrow{OE_3} = 0.$

Ta có

$(\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1}) = \overrightarrow{OE_1}^2 + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_2}.\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_3} = 0.$

Vậy $Ox_1 \perp Oz_1$.

Tương tự, ta cũng có $Oy_1 \perp Oz_1$.

11. a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

b) $m^2 + n^2 + p^2 > 0.$

12. Theo giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AA_1},\ \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{CC_1}.$$

Do (α), (β), (γ) song song với nhau, hai đường thẳng Δ, Δ_1 cắt chúng lần lượt tại A, B, C và A_1, B_1, C_1 nên theo định lí Ta-lét, ta có

$$\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{B_1A_1} = k\overrightarrow{B_1C_1}.$$

Từ $\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC}$ nên với điểm O, ta có

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1} - k\overrightarrow{OC_1}}{1-k}.$$

Từ đó $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{AA_1}}{1-k} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{CC_1}$

hay $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{OI} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OK}.$

Lấy O trùng với I, ta có $\overrightarrow{IJ} = -\frac{k}{1-k}\overrightarrow{IK}.$

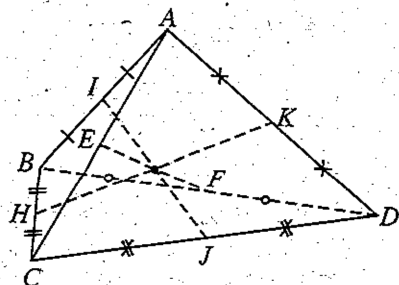
Như vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

13. (h.142)

Trước hết, ta chứng minh

$AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2.$

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Ta có



Hình 142

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$$

$$= -\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{DC}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{a}) + \left(\frac{\vec{c}}{2}\right) = \frac{-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{2}.$$

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 4\overrightarrow{IJ}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 + \vec{c}^2 + (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2$$

$$= 2\vec{b}^2 + 2\vec{a}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a}.\vec{c} - 2\vec{b}.\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = (\vec{c} - \vec{a})^2 + \vec{b}^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 + \vec{a}^2$$

$$= 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a}.\vec{c} - 2\vec{b}.\vec{c}.$$

Vậy, ta có

$$AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2$$

Tương tự, ta có

$$AC^2 + BD^2 + AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 4HK^2$$

$$AB^2 + CD^2 + BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2.$$

Từ đó

$$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2).$$

14. (h.143)

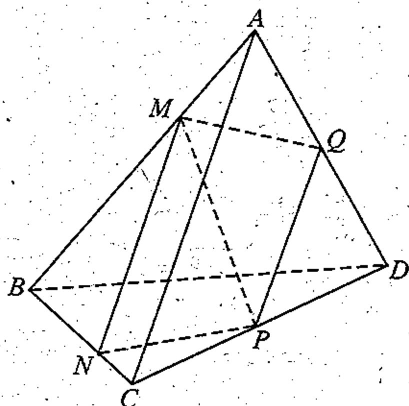
Cách 1

Từ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, ta có $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$,

mặt khác $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

nên $MN \parallel AC$.

Nếu có k để các điểm M, N, P, Q thuộc một mặt phẳng thì mp(MNQ) cắt mp(ACD) theo giao tuyến PQ nên $PQ \parallel AC$.



Hình 143

Mặt khác $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

nên $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Vậy $k = \frac{1}{2}$ thì các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Cách 2

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Khi đó $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Do $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = -\vec{a} + k\overrightarrow{DC} = -\vec{a} + k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\vec{a}.$$

Khi đó

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Các điểm M, N, P, Q thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi có số x, y sao cho

$$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c} = -\frac{2}{3}x\vec{a} + \frac{2}{3}x\vec{c} - \frac{1}{6}y\vec{a} - \frac{1}{3}y\vec{b}.$$

Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên điều đó tương đương với

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{6}y = -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{1}{3}y = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3}x = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = 1, x = \frac{3}{4}, k = \frac{1}{2}.$$

Vậy khi $k = \dfrac{1}{2}$ thì các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

15. (h.144)

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Vì M thuộc đường thẳng AA' nên

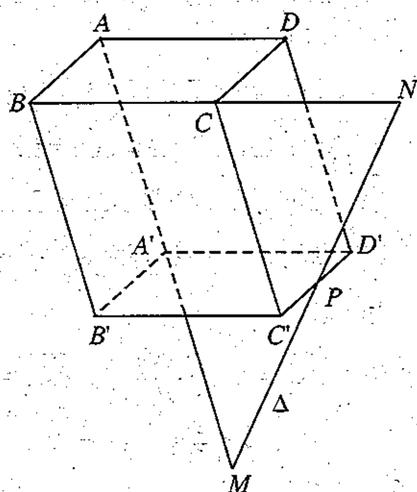
$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c};$$

N là điểm thuộc đường thẳng BC nên

$$\overrightarrow{BN} = l\vec{a};$$

P là điểm thuộc đường thẳng $C'D'$ nên

$$\overrightarrow{C'P} = m\vec{b}.$$



Hình 144

Với k, l, m là những số thực.

Ta có

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P}$$

$$= -l\vec{a} + \vec{c} + \vec{a} + m\vec{b}$$

$$= (1 - l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}.$$

Do $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$ nên ta có

$$\begin{cases} -l = 2(1 - l) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow k = 2, m = -\frac{1}{2}, l = 2.$$

Vậy $$\frac{MA}{MA'} = 2.$$

§2, §3, §4. Hai đường thẳng vuông góc. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Hai mặt phẳng vuông góc

16. (h.145)

a) Vì $BC \parallel AD$ nên góc giữa SD và BC bằng góc giữa SD và AD.

Từ giả thiết, ta có $SA \perp BC$

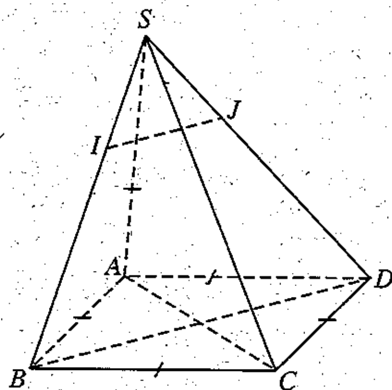
nên $SA \perp AD$

mặt khác SA bằng cạnh của hình thoi $ABCD$, nên $\widehat{SDA} = 45^{\circ}$ là góc phải tìm.

Vậy góc giữa BC và SD bằng 45°.

b) Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.

Mặt khác $IJ \parallel BD$ nên $AC \perp IJ$ tức là góc giữa IJ và AC bằng 90° không đổi.



Hình 145

17. (h.146)

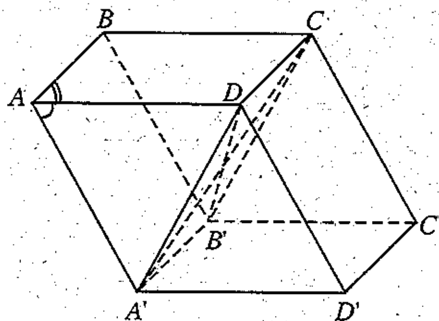
Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{z}$ thì

$$\vec{x}^2 = \vec{y}^2 = \vec{z}^2 = a^2$$

$$\vec{x}.\vec{y} = \frac{a^2}{2};$$

$$\vec{x}.\vec{z} = -\frac{a^2}{2};$$

$$\vec{y}.\vec{z} = -\frac{a^2}{2}.$$



Hình 146

a) • Vì $AB \parallel A'B'$ nên góc giữa AB và $A'D$ bằng góc giữa $A'B'$ và $A'D$, đó là góc $\widehat{DA'B'}$ hoặc $180^{\circ} - \widehat{DA'B'}$.

Đặt $\widehat{DA'B'} = \alpha$.

Ta có $A'D = a\sqrt{3}$, $A'B' = a$.

$$\overrightarrow{DB'} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{DB'}^2 = 3a^2 - a^2 - a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Vậy $2a^2 = a^2 + 3a^2 - 2a.a\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Như thế góc giữa $A'D$ và AB bằng α mà $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

- $\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AC'}^2 = 3a^2 + a^2 - a^2 - a^2 = 2a^2$.

Dễ thấy $AB' = a$.

Ta có $ADC'B'$ là hình bình hành mà $AD = AB'$, $AC' = B'D$ nên tứ giác $ADC'B'$ là hình vuông. Vậy $AC' \perp B'D$, tức là góc giữa AC' và $B'D$ bằng 90°.

b) $S_{A'B'CD} = A'D.A'B'\sin\widehat{DA'B'} = a\sqrt{3}.a.\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $S_{A'B'CD} = a^2\sqrt{2}$.

Đặt $\widehat{ACC'} = \beta$ thì $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 - 2AC.CC'.\cos\beta$

hay $$2a^2 = 3a^2 + a^2 - 2a\sqrt{3}\,.a.\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $$S_{ACC'A'} = AC.CC'.\sin\beta = a\sqrt{3}.a.\frac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}.$$

c) Do $\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$.

Suy ra :

- $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})\vec{x}$

$$= a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a^2$$

hay $$|\overrightarrow{AC'}||\overrightarrow{AB}|\cos\gamma = a^2$$

$$\Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa AC' và AB bằng 45°.

Vậy hai góc trên bằng nhau và bằng 45^o khi và chỉ khi

$$MP = NP \text{ và } \widehat{MPN} = 90^o.$$

Từ đó, suy ra $\frac{CP}{CA}.AB = \frac{AP}{AC}.CD$ và $AB \perp CD$

hay $$\frac{AB}{CD} = \frac{AP}{CP} \text{ và } AB \perp CD.$$

Mặt khác, ta có $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PC} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = |k|$.

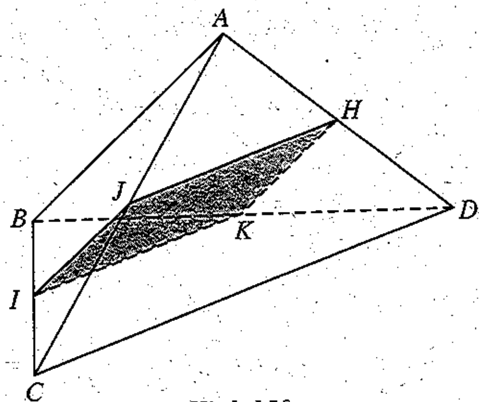
Vậy giữa AB và CD có mối liên hệ

$$\frac{AB}{CD} = |k| \text{ và } AB \perp CD$$

thì góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BA}$ bằng góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$, cùng bằng 45^o.

21. (h.150)

Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng IJ và IK, đó là góc $\widehat{JIK}$ hoặc $180^o - \widehat{JIK}$.



Hình 150

a) Vì tứ giác $IJHK$ là hình thoi mà $IH = \sqrt{3}IJ$, nên từ $JK^2 + IH^2 = 4IJ^2$

ta có $\quad JK^2 = IJ^2$

hay $\quad JK = IJ$.

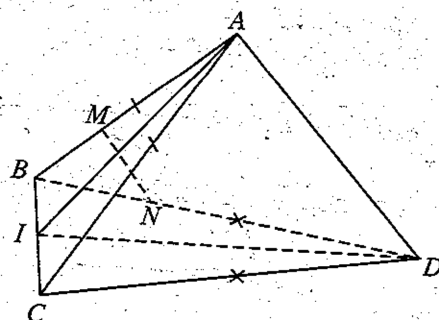
Như vậy JIK là tam giác đều, do đó $\widehat{JIK} = 60^o$.

Vậy góc giữa AB và CD trong trường hợp này bằng 60^o.

b) Khi tứ giác $IJHK$ là hình chữ nhật thì $\widehat{JIK} = 90^o$. Do đó, góc giữa AB và CD bằng 90^o.

22. (h.151)

a) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC, DI \perp BC$.



Hình 151

Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$.

Xét $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID})$

$$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{ID} = 0.$$

Vậy $BC \perp AD$.

b) Từ giả thiết $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$$

ta có $MN \,//\, AD$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC bằng góc giữa hai đường thẳng AD và BC. Theo câu a) thì AD vuông góc BC, nên góc giữa MN và BC bằng 90^o.

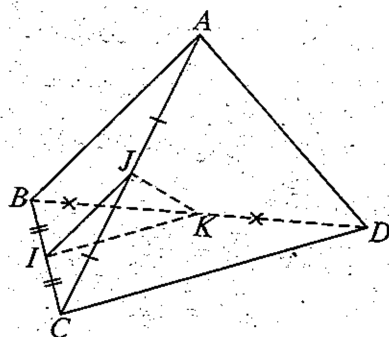
23. (h.152)

– Ta có $IJ = \frac{1}{2}AB$

$$IK = \frac{1}{2}CD = \frac{2}{3}AB$$

$$IJ^2 + IK^2 = \frac{1}{4}AB^2 + \frac{4}{9}AB^2$$

$$= \frac{25}{36}AB^2$$



Hình 152

mà $JK^2 = \frac{25}{36}AB^2$ nên $IJ^2 + IK^2 = JK^2$.

Vậy $JI \perp IK$.

Do $IJ \,//\, AB$, $IK \,//\, CD$ nên góc giữa AB và CD bằng 90^o.

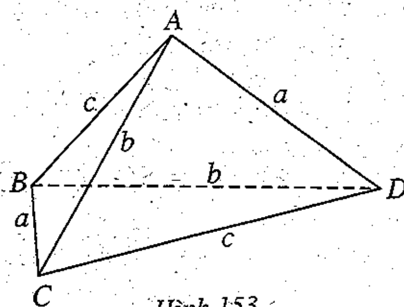
Mặt khác $IJ \,//\, AB$ mà $AB \perp CD$ nên $IJ \perp CD$.

Vậy góc giữa IJ và CD bằng 90^o.

24. (h.153)

Áp dụng ví dụ 2 (§1 chương III, SGK Hình học 11 nâng cao), ta có

$$\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{2c^2 - 2b^2}{2a^2} = \frac{c^2 - b^2}{a^2}.$$



Hình 153

Vậy nếu góc giữa BC và AD bằng α thì

$$\cos\alpha = \frac{|c^2 - b^2|}{a^2}$$

hay $\quad a^2\cos\alpha = |c^2 - b^2|.$

Tương tự như trên, nếu gọi β là góc giữa AC và BD thì

$$b^2\cos\beta = |a^2 - c^2|$$

và γ là góc giữa AB và CD thì

$$c^2\cos\gamma = |b^2 - a^2|.$$

Với a, b, c lần lượt là độ dài của BC, CA, AB, không giảm tính tổng quát có thể coi $a \geq b \geq c$. Khi đó

$$a^2\cos\alpha = b^2 - c^2$$

$$b^2\cos\beta = a^2 - c^2$$

$$c^2\cos\gamma = a^2 - b^2.$$

Từ đó, trong trường hợp này ta có $b^2\cos\beta = a^2\cos\alpha + c^2\cos\gamma$.

25. (h.154)

a) Từ $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}$

ta có $IJ \parallel AB$.

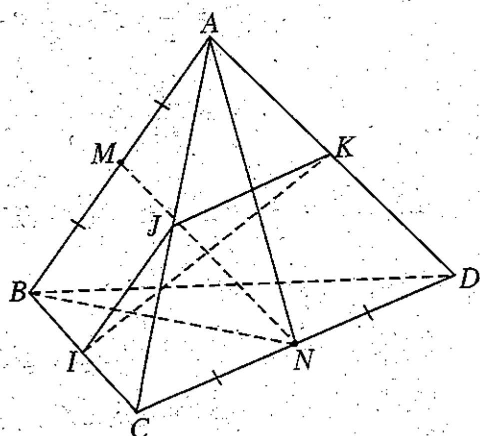
Tương tự, ta có $JK \parallel CD$.

Do các cạnh của tứ diện $ABCD$ bằng nhau và N là trung điểm của CD nên $NA = NB$.

Mặt khác $MA = MB$,

do đó $MN \perp AB$, suy ra $MN \perp IJ$.

Tương tự như trên, ta có $MN \perp CD$ và $JK \parallel CD$ nên $MN \perp JK$.



Hình 154

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}$.

Từ giả thiết, ta có

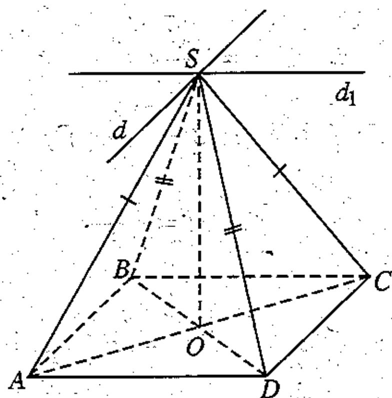
$AN \perp CD$ tức là $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CD} = 0$;

$BN \perp CD$ tức là $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}).\overrightarrow{CD} = 0$ tức là $AB \perp CD$.

26. (h.155)

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành và $O = AC \cap BD$ nên $OA = OC$ và $OB = OD$. Mặt khác $SA = SC$ nên $SO \perp AC$ và $SB = SD$ nên $SO \perp BD$.



Hình 155

Vậy $SO \perp$ mp($ABCD$).

b) Vì $AB \,//\, CD$

mà $d =$ mp(SAB) $\cap$ mp(SCD)

nên $d \,//\, AB$ và d qua S.

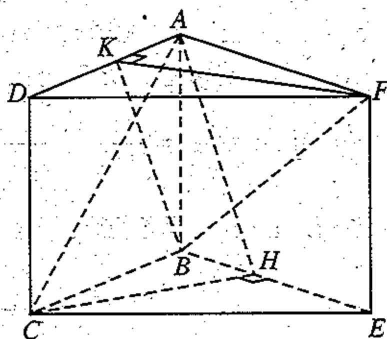
Tương tự $d_1 \,//\, AD$ và d_1 qua S.

Do $SO \perp$ mp($ABCD$) nên $SO \perp d$, $SO \perp d_1$.

Vậy $SO \perp$ mp(d, d_1).

27. (h.156)

a) Ta có $\left.\begin{array}{l} AB \perp (BCE) \\ CH \perp BE \end{array}\right\} \Rightarrow CH \perp AH$.



Hình 156

Vậy ACH là tam giác vuông tại H.

Tương tự, ta có BKF là tam giác vuông tại K.

b) Ta có $\left.\begin{array}{l} CH \perp BE \\ CH \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow CH \perp BF$.

Mặt khác $AC \perp BF$.

Vậy $BF \perp AH$.

Tương tự, ta có $AC \perp BK$.

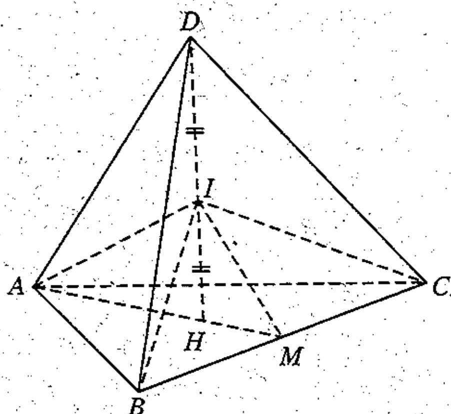
28. (h.157)

a) Kí hiệu cạnh của tứ diện đã cho là a, dễ thấy H là trọng tâm của tam giác ABC. Từ đó

$$DH^2 = DA^2 - AH^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6a^2}{9}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Hình 157

Do I là trung điểm của DH nên

$$IH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Khi đó $$IM^2 = IH^2 + HM^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

tức là $$IM = \frac{a}{2}.$$

Xét tam giác IBC có IM là trung tuyến và $IM = \frac{1}{2}BC$. Vậy $IB \perp IC$.

Tương tự như trên, ta có IA, IB, IC đôi một vuông góc.

b) Vì IA, IB, IC đôi một vuông góc, $IA = IB = IC$ và H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (ABC) nên ABC là tam giác đều nhận H làm trọng tâm. Ngoài ra $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} + \frac{1}{IC^2} = \frac{3}{IA^2}$ hay $IH = \frac{IA}{\sqrt{3}}$.

Do D là điểm đối xứng của H qua I nên

$$DH = \frac{2IA}{\sqrt{3}} \text{ và } DA = DB = DC.$$

Đặt $IA = x$ thì $DH = \frac{2x}{\sqrt{3}}$, $AB = x\sqrt{2}$.

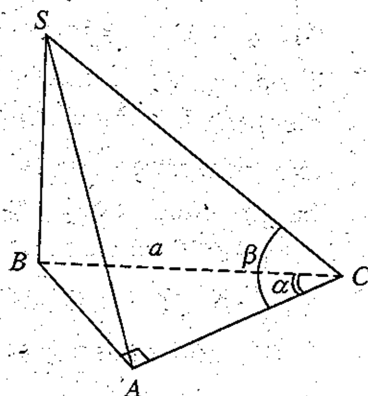
Khi đó $DA^2 = DH^2 + HA^2 = \dfrac{4x^2}{3} + \left(\dfrac{x\sqrt{2}.\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$$= \frac{4x^2}{3} + \frac{2x^2}{3} = 2x^2.$$

Vậy $DA = DB = DC = x\sqrt{2}$.

Do đó tứ diện $DBCA$ có các cạnh bằng nhau.

29. (h.158)



Hình 158

a) $SB \perp (ABC)$ và $BA \perp AC$ nên $SA \perp AC$ tức là SAC là tam giác vuông tại A.

b) Ta có $AC = a\cos\alpha$

$$SA = AC\tan\beta = a\cos\alpha\tan\beta$$

$$SC = \frac{AC}{\cos\beta} = \frac{a\cos\alpha}{\cos\beta}$$

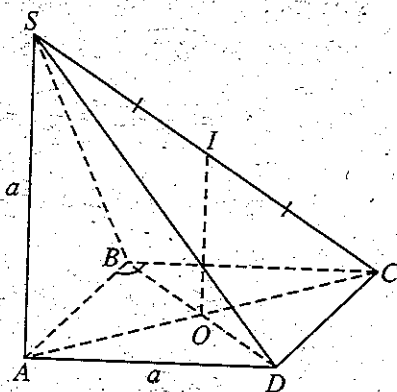
$$SB^2 = SC^2 - BC^2 = \frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} - a^2$$

$$= \frac{a^2(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)}{\cos^2\beta}.$$

Vậy $$SB = \frac{a}{\cos\beta}.\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

(Điều kiện để bài toán có nghĩa là α, β phải thoả mãn $\cos^2\alpha > \cos^2\beta$).

30. (h.159)



Hình 159

a) Ta có $SB = SD = a\sqrt{2}$, $AC = a$

(vì ABC là tam giác cân mà $\widehat{ABC} = 60^\circ$).

Vậy $SC = a\sqrt{2}$.

b) Gọi $O = AC \cap BD$ thì

$IO \,//\, SA$ nên $IO \perp (ABCD)$, từ đó

$IO \perp BD$.

Mặt khác $OB = OD$ nên BID là tam giác cân tại I, tức là $IB = ID$.

31. Giả sử $ABCD$ là tứ diện có tính chất $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

Từ bài tập 20 chương III SGK Hình học 11 nâng cao, ta có

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2.$$

Từ đó, ta có

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = AC^2 + AD^2 - CD^2 = AD^2 + AB^2 - BD^2.$$

Hệ thức này khẳng định các góc $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}, \widehat{DAB}$ hoặc cùng nhọn, cùng vuông hoặc cùng tù.

Tương tự như trên, ta chứng minh được ba góc tại bất cứ đỉnh nào của tứ diện $ABCD$ cũng có tính chất đó. Do tính chất tổng các góc trong của một tam giác bằng 180° nên tồn tại nhiều nhất một đỉnh của tứ diện mà tại đó ba góc cùng vuông hay cùng tù. Khi ấy mặt đối diện với đỉnh đó của tứ diện $ABCD$ có cả ba góc đều nhọn.

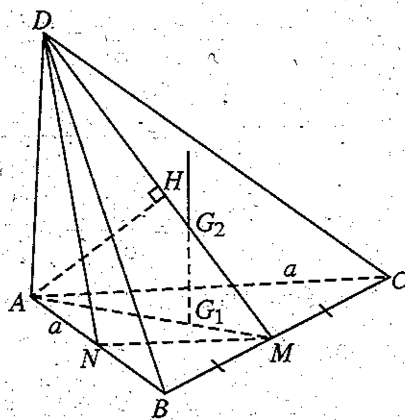
Vậy nếu $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ và $AD \perp BC$ thì trong bốn mặt của tứ diện $ABCD$ có ít nhất một mặt là tam giác nhọn (cả ba góc của nó nhỏ hơn 90°).

32. (h.160)

a) Vì M là trung điểm của BC nên $AM \perp BC$, mặt khác $DA \perp (ABC)$ nên BC vuông góc với mp(DAM), từ đó $BC \perp AH$.

Mà $DM \perp AH$.

Vậy $AH \perp$ mp(DBC).



Hình 160

b) Kẻ MN song song với AC ($N \in AB$) thì góc giữa DM và AC bằng góc giữa DM và MN, đó là $\widehat{DMN}$ hoặc $180^\circ - \widehat{DMN}$.

Ta có $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$, $AN = \frac{a}{2}$.

$$DN^2 = DA^2 + AN^2 = \frac{16}{25}a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{89}{100}a^2$$

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - \frac{9a^2}{25} = \frac{16a^2}{25}$$

$$\Rightarrow \quad AM = \frac{4a}{5}.$$

Mặt khác $AD = \frac{4a}{5}$ do đó $DM = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$.

$$DN^2 = DM^2 + MN^2 - 2DM.MN\cos\widehat{DMN}$$

$$\frac{89}{100}a^2 = \frac{2.16a^2}{25} + \frac{a^2}{4} - 2\cdot\frac{4a\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{a}{2}\cos\widehat{DMN}$$

$$= \frac{153a^2}{100} - \frac{4a^2\sqrt{2}}{5}\cos\widehat{DMN}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4a^2\sqrt{2}}{5}\cos\widehat{DMN} = \frac{64a^2}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\widehat{DMN} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Vậy góc giữa AC và DM là α mà $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

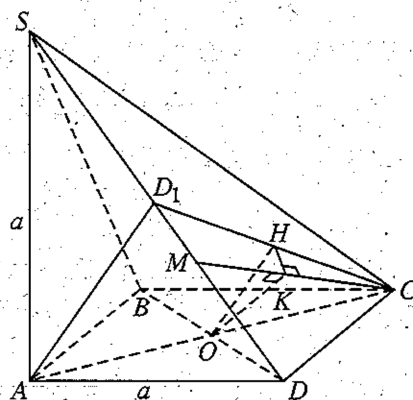
c) Dễ thấy $G_1G_2 // DA$ mà $DA \perp (ABC)$

nên $G_1G_2 \perp (ABC)$.

33. (h.161)

a) Vì $SA = AD = a$ và D_1 là trung điểm của SD nên $AD_1 \perp SD$. Mặt khác, ta có $CD \perp (SAD)$ nên $AD_1 \perp CD$. Vậy $AD_1 \perp (SCD)$.

b) Kẻ $OH // AD_1$ thì H là trung điểm của D_1C và $OH \perp (SCD)$, ngoài ra H cố định.



Hình 161

Gọi K là hình chiếu của O trên CM thì $HK \perp KC$ (định lí ba đường vuông góc). Từ đó, suy ra điểm K thuộc đường tròn đường kính HC trong mp(SCD). Đó là đường tròn cố định chứa hình chiếu của tâm hình vuông trên mặt phẳng (SCD)

34. (h.162)

a) Vì $SA \perp (P)$, $\Delta \subset (P)$, $SH \perp \Delta$ nên $AH \perp HB$ (định lí ba đường vuông góc). Như vậy $\widehat{AHB} = 90^\circ$. Do A, B cố định thuộc (P), $H \in (P)$ nên điểm H thuộc đường tròn đường kính AB cố định trong (P).

b) – Vì $HB \perp (SAH)$ nên $HB \perp AK$, mặt khác $AK \perp SH$ nên $AK \perp (SHB)$.

Hình 162

Vậy $AK \perp SI$. Do giả thiết $AI \perp SB$, từ đó $SB \perp (AKI)$.

S, B, A là các điểm cố định nên mp(AKI) cố định và I cố định.

Do $AK \perp (SHB)$ nên $AK \perp KI$. Vậy K thuộc đường tròn đường kính AI trong mặt phẳng (AKI) cố định nói trên. Đó chính là đường tròn cố định chứa điểm K.

– Đặt $\widehat{ABH} = \alpha$ thì $AH = AB\sin\alpha = 2R\sin\alpha$ $\quad (AB = 2R)$.

Ta có tam giác AKI vuông tại K với cạnh huyền AI cố định, từ đó diện tích tam giác AKI đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi AKI là tam giác vuông cân, lúc đó $AK = \dfrac{AI}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{4R^2\sin^2\alpha}$

hay $\dfrac{2}{AI^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{4R^2\sin^2\alpha}$ $\quad (h = SA)$.

Vì AI là đường cao của tam giác vuông SAB nên

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4R^2}.$$

Vậy S_{AKI} đạt giá trị lớn nhất khi α thoả mãn điều kiện

$$\frac{2}{h^2}+\frac{2}{4R^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{4R^2\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{h^2}+\frac{2}{4R^2}=\frac{1}{4R^2\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4R^2+2h^2}{h^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\alpha=\frac{h}{\sqrt{4R^2+2h^2}}.$$

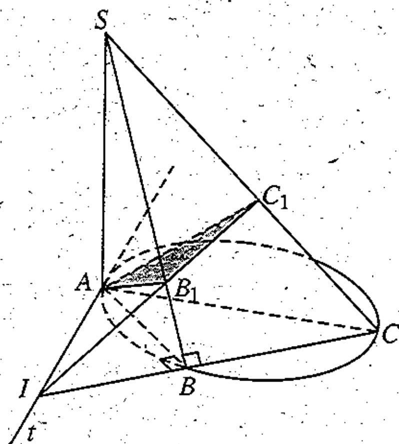
Như vậy, có hai vị trí của đường thẳng Δ để S_{AKI} đạt giá trị lớn nhất.

c) Ta có SH lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất, điều này xảy ra khi AH trùng với AB. Vậy nếu Δ trong (P) vuông góc với AB tại B thì SH đạt giá trị lớn nhất.

SH đạt giá trị bé nhất khi và chỉ khi AH đạt giá trị bé nhất, điều này xảy ra khi H trùng với điểm A, tức là Δ trùng với đường thẳng AB.

35. (h.163)

a) Dễ chứng minh được $SC \perp (AB_1C_1)$. Gọi At là giao tuyến của (ABC) và (AB_1C_1) thì $At \perp SC$. Mặt khác $SA \perp (ABC)$ nên $At \perp AC$. Vậy đường thẳng At cố định, đồng thời đường thẳng At là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



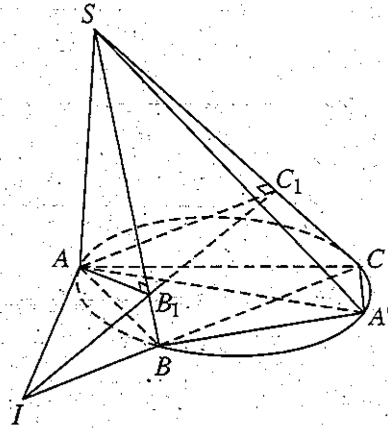
Hình 163

b) Kí hiệu I là giao điểm của At và đường thẳng BC thì I là điểm cố định, mặt khác các điểm I, B_1, C_1 thuộc cả hai mặt phẳng (AB_1C_1) và (SBC), do đó các điểm I, B_1, C_1 thẳng hàng, tức là đường thẳng B_1C_1 đi qua điểm cố định I khi S thay đổi trên đường thẳng kẻ từ A vuông góc với mp(ABC).

Cũng từ chứng minh trên ta có $\widehat{IAB}=\widehat{ICA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

36. (h.164)

a) Ta có $SA^2 = SB.SB_1 = SC.SC_1$. Vậy bốn điểm B, C, B_1, C_1 thuộc một đường tròn. Nếu B_1C_1 và BC là hai đường thẳng song song thì suy ra BB_1C_1C là hình thang cân, từ đó SBC là tam giác cân tại S, điều đó dẫn đến ABC là tam giác cân tại A, mâu thuẫn với giả thiết, từ đó suy ra điều phải chứng minh.



Hình 164

b) Gọi I là giao điểm của B_1C_1 và BC thì AI là giao tuyến của (ABC) và (AB_1C_1). Gọi AA' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta chứng minh được $(AB_1C_1) \perp SA'$, từ đó $AI \perp AA'$. Như vậy, giao tuyến AI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Nếu điểm B nằm giữa I và C (h.165) thì ta có $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$).

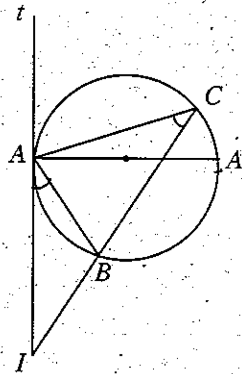
Nếu điểm C nằm giữa I và B (h. 166) thì ta có

$\widehat{BAt} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$) ;

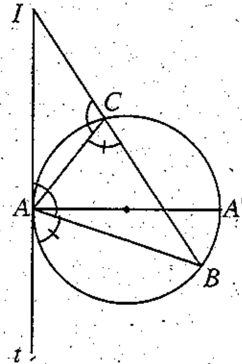
mặt khác $\widehat{IAB} + \widehat{BAt} = 180^\circ$

và $\widehat{ICA} + \widehat{ACB} = 180^\circ$.

Như vậy $\widehat{ICA} = \widehat{IAB}$.



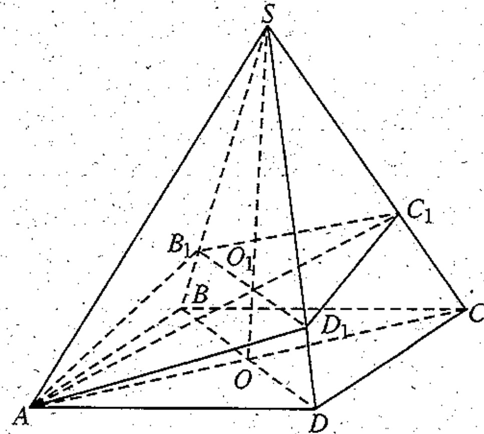
Hình 165



Hình 166

37. (h.167)

Vì $(\alpha) \perp SC$ và $A \in (\alpha)$ nên $AC_1 \perp SC$. Mặt khác, gọi $B_1D_1 = (\alpha) \cap (SBD)$ thì B_1D_1



Hình 167

song song với BD và B_1D_1 qua O_1 với $O_1 = AC_1 \cap SO$ (do $BD \perp SC$, $(\alpha) \perp SC$ nên $BD \,//\, (\alpha)$).

Vì SAC là tam giác cân tại S và $AC_1 \perp SC$ nên C_1 thuộc SC khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^o$ tức là $\widehat{OSC} < 45^o$. Xét tam giác vuông SOC, điều kiện $\widehat{OSC} < 45^o$ tương đương với $SO > OC = \dfrac{AC}{2} = 2a$. Vậy để C_1 thuộc SC, C_1 không trùng với C và S thì hệ thức liên hệ giữa h và a là $h > 2a$.

Dễ thấy thiết diện của $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là tứ giác $AB_1C_1D_1$ có tính chất $AC_1 \perp B_1D_1$. Do đó $S_{AB_1C_1D_1} = \dfrac{1}{2}AC_1.B_1D_1$.

Ta có $\quad AC_1.SC = SO.AC \Rightarrow AC_1 = \dfrac{4ah}{\sqrt{4a^2+h^2}}$;

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{SO_1}{SO},$$

mặt khác $\dfrac{O_1O}{CO} = \dfrac{AO}{SO} \Rightarrow O_1O = \dfrac{4a^2}{h} \Rightarrow SO_1 = \dfrac{h^2-4a^2}{h}$.

Từ đó $\quad \dfrac{B_1D_1}{BD} = \dfrac{h^2-4a^2}{h^2}$

hay $\quad B_1D_1 = \dfrac{2a(h^2-4a^2)}{h^2}$.

Vậy $\quad S_{AB_1C_1D_1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4ah}{\sqrt{4a^2+h^2}}\cdot\dfrac{2a(h^2-4a^2)}{h^2}$

$$= \frac{4a^2(h^2-4a^2)}{h\sqrt{4a^2+h^2}}.$$

38. (h.168)

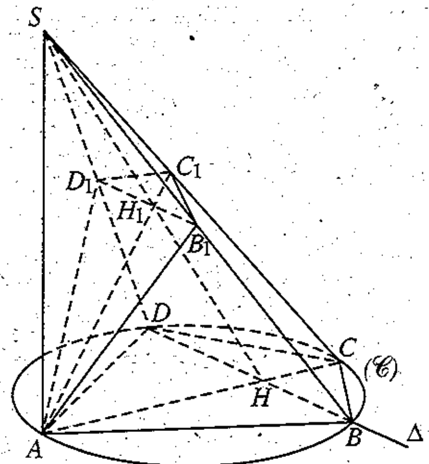
a) Vì (Q) qua A và $(Q) \perp SC$ nên $AB_1 \perp SC$.

Mặt khác dễ thấy $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AB_1$.

Vậy $AB_1 \perp mp(SBC)$, tức là $AB_1 \perp B_1C_1$.

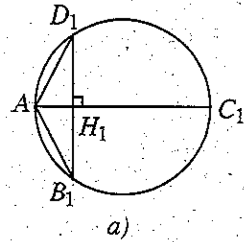
Tương tự như trên, ta có $AD_1 \perp D_1C_1$.

Do đó, tứ giác $AB_1C_1D_1$ nội tiếp đường tròn.



Hình 168

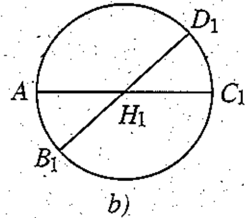
b) Do tứ giác $AB_1C_1D_1$ nội tiếp đường tròn đường kính AC_1 mà AC_1 cắt B_1D_1, tại H_1 nên H_1 là trung điểm của B_1D_1, khi đó xảy ra một trong hai trường hợp sau :



a)

– *Trường hợp 1.* $B_1D_1 \perp AC_1$ tại H_1 (h.169a).

– *Trường hợp 2.* B_1D_1 qua trung điểm H_1 của AC_1 (h.169b).



b)

Xét trường hợp 1

Vì $B_1D_1 \perp AC_1$ nên $AB_1 = AD_1$.

Mặt khác AB_1, AD_1 là hai đường cao của hai tam giác vuông SAB và SAD nên

$$AB_1 = AD_1 \Leftrightarrow AB = AD$$

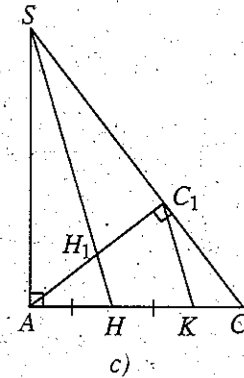
(vì $\frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AB_1^2}$ và $\frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AD_1^2}$).

Lại có AC là đường kính của $(\mathscr{C})$ nên

$$AB = AD \Leftrightarrow BD \perp AC.$$

Vậy nếu đường thẳng Δ vuông góc với AC tại H mà $0 < AH < AC$ thì H_1 là trung điểm của B_1D_1.

Xét trường hợp 2 (h.169c)



c)

Hình 169

Kẻ C_1K // H_1H, do H_1 là trung điểm của AC_1 nên $AH = HK = x$, từ đó $CK = 2R - 2x$. Khi đó

$$\frac{2R-2x}{2R-x} = \frac{CK}{CH} = \frac{CC_1}{CS} = \frac{CC_1.CS}{CS^2} = \frac{AC^2}{CS^2} = \frac{4R^2}{h^2+4R^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (R-x)(h^2+4R^2) = 2R^2(2R-x)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{Rh^2}{h^2+2R^2}.$$

Dễ thấy $0 < x < 2R$.

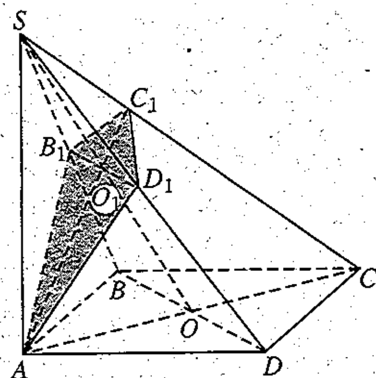
Vậy nếu đường thẳng Δ quay quanh điểm H mà H được xác định bởi

$$AH = x = \frac{Rh^2}{h^2+2R^2}, H \in AC$$

thì H_1 là trung điểm của B_1D_1.

c) Bạn đọc tự giải.

39. (h.170)



Hình 170

a) Dễ dàng thấy SAB, SAD là các tam giác vuông tại A.

Mặt khác $SA \perp (ABCD)$, $AD \perp DC$

nên $SD \perp DC$ (định lí ba đường vuông góc), do đó SDC là tam giác vuông tại D.

Tương tự, SBC là tam giác vuông tại B.

b) Dễ dàng chứng minh được

$$AD_1 \perp (SCD)$$

$$\Rightarrow \quad AD_1 \perp SC.$$

Cũng như vậy, ta có $AB_1 \perp SC$.

Vậy $\quad SC \perp (AB_1D_1)$.

Gọi $O = AC \cap BD$, $O_1 = B_1D_1 \cap SO$ thì $C_1 = AO_1 \cap SC$.

Mặt khác $\quad \Delta SAB = \Delta SAD$ (c.g.c) nên $B_1D_1 \,//\, BD$.

Ta lại có $\quad BD \perp (SAC)$

$$\Rightarrow \quad B_1D_1 \perp (SAC) \Rightarrow B_1D_1 \perp AC_1.$$

Từ đó $\quad S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2} AC_1.B_1D_1.$

Ta có $\quad AC_1 = \frac{SA.AC}{SC} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SB_1.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{a^2}{2a^2}.$$

$$\Rightarrow \quad B_1D_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

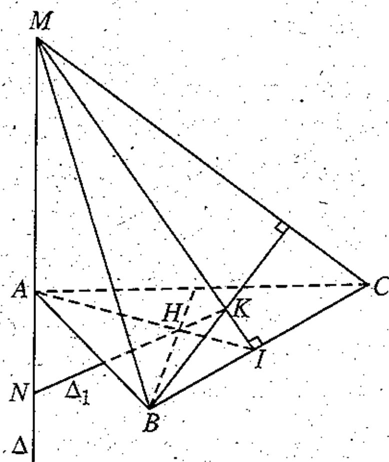
(*Chú ý.* Có thể thấy B_1, D_1 thứ tự là trung điểm của SB và SD nên $B_1D_1 \,//\, BD$ và $B_1D_1 = \frac{1}{2}BD$).

Vậy $\quad S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$

40. (h.171)

a) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$, $MI \perp BC$. Vậy K thuộc MI. Ta cũng có $BC \perp (MAI)$. Do Δ_1 đi qua K và $\Delta_1 \perp (MBC)$ nên $\Delta_1 \perp BC$. Vậy Δ_1 nằm trong mp(MAI). Gọi giao điểm của Δ_1 với AI là H thì $HK \perp MC$, mặt khác $BK \perp MC$, từ đó MC vuông góc với (BHK) hay $MC \perp BH$.

Từ $\Delta \perp (ABC)$, $BH \perp MC$ nên $BH \perp AC$. Vậy H là trực tâm của tam giác ABC. Điều này chứng tỏ khi M thay đổi trên Δ thì Δ_1 đi qua điểm cố định là trực tâm H của tam giác ABC.



Hình 171

b) Vì Δ_1 là đường thẳng HK nên Δ_1 cắt Δ tại điểm N.

Theo câu a), ta có MC vuông góc với (BHK) mà BN thuộc mặt phẳng này, vậy NB vuông góc với MC.

Tương tự như trên, ta cũng có $MB \perp NC$.

Từ $\Delta AHN \backsim \Delta AMI$, ta có $\dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AN}{AI} \Rightarrow AH.AI = AM.AN$.

Mặt khác $\quad AH.AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

do đó $\quad AM.AN = \dfrac{a^2}{2}$.

Ta có $\quad MN = AM + AN$.

Vậy MN ngắn nhất khi và chỉ khi $AM = AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hệ thức này xác định điểm M để MN có độ dài ngắn nhất.

41. (h.172)

a) Vì $(ABC) \perp (SAB)$

$(SBC) \perp (SAB)$

mà $BC = (ABC) \cap (SBC)$ nên

$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Như vậy, tứ diện $SABC$ có $\widehat{SAC} = 90^\circ$ và $\widehat{SBC} = 90^\circ$ nên điểm cách đều S, A, B, C là trung điểm của SC.

Chú ý. Có thể chứng minh $BC \perp SB$ như sau :

Kẻ $AB_1 \perp SB$, do $(SAB) \perp (SBC)$ nên $AB_1 \perp (SBC)$

$\Rightarrow$ $AB_1 \perp BC$,

mặt khác $BC \perp SA$

$\Rightarrow$ $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ $BC \perp SB.$

Hình 172

b) Kẻ $AB_1 \perp SB$, $AC_1 \perp SC$, dễ chứng minh được

$AB_1 \perp (SBC)$ và

$(AB_1C_1) \perp SC.$

Từ đó $\widehat{AC_1B_1}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCA) và (SCB).

Xét ΔAB_1C_1 ta có $AB_1 = B_1C_1\tan 60^\circ$

mà $AB_1 = SB_1\tan\alpha$, $B_1C_1 = SB_1\sin 45^\circ$.

Vậy hai mặt phẳng (SCA) và (SCB) tạo với nhau góc 60° khi và chỉ khi

$$SB_1\tan\alpha = SB_1.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Hệ thức này xác định α.

42. (h.173)

a) Gọi H là trung điểm của AB thì

$SH \perp AB.$

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AD,$

mặt khác $AD \perp AB.$

Hình 173

Vậy $AD \perp (SAB)$.

Từ đó $(SAD) \perp (SAB)$.

Tương tự như trên, ta có

$$(SBC) \perp (SAB).$$

b) Giả sử $(SAD) \cap (SBC) = St$, dễ thấy $St \parallel AD$, từ đó mp$(ASB) \perp St$. Do $\widehat{ASB} = 60^o$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng 60^o.

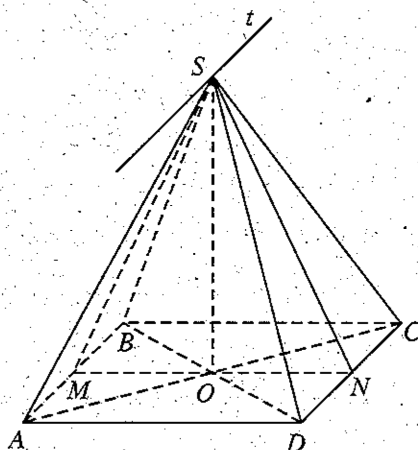
c) Vì $ABCD$ là hình vuông ; H, I lần lượt là trung điểm của AB và BC nên $HC \perp DI$, mặt khác $DI \perp SH$. Vậy $DI \perp (SHC)$, từ đó $(SDI) \perp (SHC)$.

43. (h.174)

a) Vì $MN \perp AB$, $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SMN)$ $\Rightarrow (SAB) \perp (SMN)$. Vậy góc giữa (SMN) và (SAB) bằng 90^o.

Tương tự như trên, góc giữa (SMN) và (SCD) cũng bằng 90^o.

Như vậy với $AB = a$, $BC = 2a$, h tuỳ ý thì (SMN) vuông góc cả với hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).



Hình 174

b) Dễ thấy $(SAB) \cap (SCD) = St$, $St \parallel AB$.

Như vậy $St \perp (SMN)$, từ đó $\widehat{MSN}$ hoặc $180^o - \widehat{MSN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Tính $\widehat{MSN}$.

Ta có $SM^2 = SN^2 = h^2 + a^2$,

$$MN^2 = SM^2 + SN^2 - 2SM.SN\cos\widehat{MSN}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2 = h^2 + a^2 + h^2 + a^2 - 2(h^2 + a^2)\cos\widehat{MSN}$$

tức là $\cos\widehat{MSN} = \dfrac{2h^2 - 2a^2}{2(h^2 + a^2)} = \dfrac{h^2 - a^2}{h^2 + a^2}$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là α mà $\cos\alpha = \left|\dfrac{h^2 - a^2}{h^2 + a^2}\right|$.

Từ đó hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc khi và chỉ khi $h = a$.

44. (h.175)

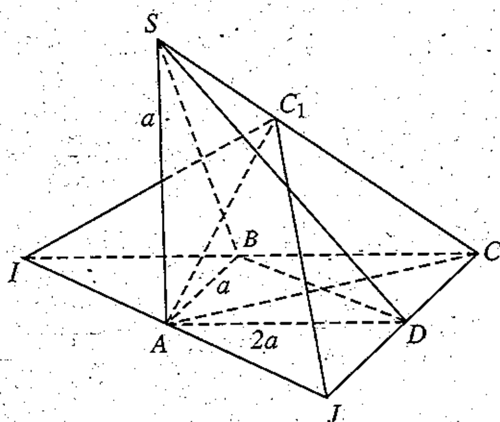
a) Dễ thấy

$(SAB) \perp (ABCD)$

$(SAD) \perp (ABCD)$

nên góc giữa mặt bên (SAB) và (SAD) với mp$(ABCD)$ bằng 90°.

Ta có $(SDA) \perp CD$ và SDA là tam giác vuông tại A nên $\widehat{SDA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và $(ABCD)$.



Hình 175

Từ đó $\tan\widehat{SDA} = \dfrac{1}{2}$.

Tương tự, $\tan\widehat{SBA} = 1 \Leftrightarrow \widehat{SBA} = 45^{\circ}$.

Vậy mp(SCD) tạo với mp$(ABCD)$ góc bằng φ mà $\tan\varphi = \dfrac{1}{2}$ và mp(SBC) tạo với mp$(ABCD)$ góc 45°.

b) Vì $(SAD) \perp (SAB)$ nên góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 90°.

Ta cũng có $CD \perp (SAD)$ nên $(SCD) \perp (SAD)$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng 90°. Tương tự, ta cũng có góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 90°.

Ta cần phải tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC).

Trong mp$(ABCD)$, kẻ qua A đường thẳng vuông góc với AC, nó cắt hai đường thẳng BC và DC lần lượt tại I và J, thì $IJ \perp SC$.

Trong mp(SAC) kẻ $AC_1 \perp SC$ thì $(IJC_1) \perp SC$.

Do đó, $\widehat{IC_1J}$ hoặc $180^{\circ} - \widehat{IC_1J}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Ta có $AJ = AC\tan\widehat{ACD} = 2a\sqrt{5}$.

$$\frac{1}{AC_1^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{5a^2} = \frac{6}{5a^2}$$

$$\Rightarrow \quad AC_1 = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

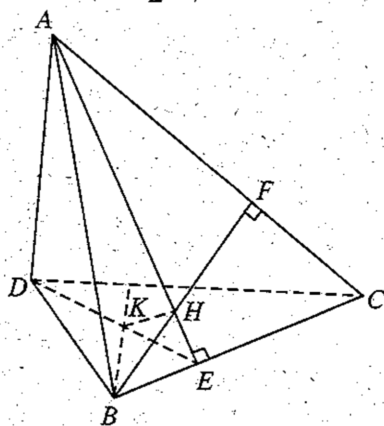
Đặt $\widehat{AC_1J} = \alpha$ thì $\tan\alpha = \dfrac{AJ}{AC_1} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}} = 2\sqrt{6}$.

Đặt $\widehat{AC_1I} = \beta$ thì $\tan\beta = \dfrac{AI}{AC_1} = \dfrac{AC\tan\widehat{ACI}}{AC_1} = \dfrac{a\sqrt{5}.\dfrac{1}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Đặt $\widehat{IC_1J} = \varphi$ thì $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{6} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}}{1 - 2\sqrt{6}.\dfrac{\sqrt{6}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy góc giữa mp(SBC) và (SCD) là $180^\circ - \varphi$ mà $\tan\varphi = \dfrac{-\sqrt{6}}{2}$.

45. (h.176)



Hình 176

a) Vì $AD \perp (DBC)$ nên $AD \perp BC$.

Mặt khác $AE \perp BC$. Vậy $BC \perp (ADE)$, từ đó ta có $(ABC) \perp (ADE)$.

Vì K là trực tâm tam giác DBC nên $BK \perp DC$. Theo giả thiết $AD \perp (DBC)$, vậy $BK \perp AC$ (định lí ba đường vuông góc). Kết hợp với $BF \perp AC$ ta có $AC \perp (BFK)$, từ đó mp(ABC) $\perp$ mp(BFK).

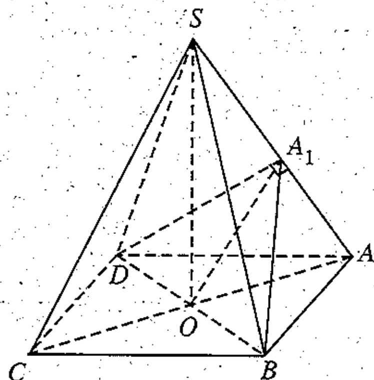
b) Từ câu a), ta có mp(BFK) $\perp$ mp(ABC)

mp(ADE) $\perp$ mp(ABC)

HK = mp(ADE) $\cap$ mp(BFK).

Vậy $HK \perp$ mp(ABC).

46. (h.177)



Hình 177

a) Ta có $AC^2 + BD^2 = 4a^2$, $AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

nên $BD^2 = \dfrac{4a^2}{3} \Rightarrow OB^2 = \dfrac{a^2}{3}$.

Xét tam giác vuông SOB, ta có

$SO^2 = SB^2 - OB^2 = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy tam giác SAC có trung tuyến SO bằng nửa AC nên SAC là tam giác vuông tại S.

b) Trong mặt phẳng (SOA) kẻ OA_1 vuông góc với SA thì $SA \perp mp(A_1BD)$, từ đó $\widehat{BA_1D}$ hoặc $180^\circ - \widehat{BA_1D}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Ta có $OA_1 = \dfrac{OA.OS}{SA} = \dfrac{OA.OS}{\sqrt{OA^2 + OS^2}}$

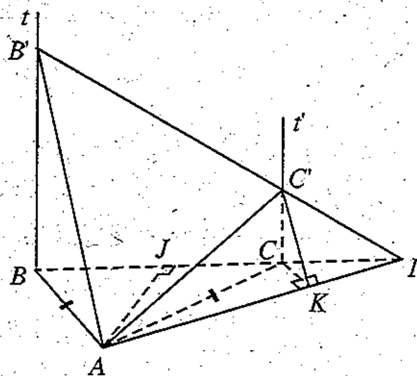
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}.\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Mặt khác $BD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, từ đó $\widehat{BA_1D} = 90^\circ$ hay hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc.

47. (h.178)

a) Vì $BB' = 3CC'$ nên đường thẳng $B'C'$ cắt BC tại điểm I thì $BI = \dfrac{3}{2}BC$.

Như vậy I là điểm cố định, mặt khác giao tuyến của $mp(AB'C')$ và $mp(ABC)$ là AI. Như vậy, khi B', C' thay đổi thì giao tuyến của $mp(AB'C')$ và $mp(ABC)$ là đường thẳng AI cố định.



Hình 178

b) Khi $BB' = a$ thì $CC' = \dfrac{a}{3}$. Dễ thấy $BC = a\sqrt{3}$. Do $CI = \dfrac{1}{2}BC$

nên $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $AJ = \dfrac{a}{2}$ $(AJ \perp BC, J \in BC)$ và $IJ = a\sqrt{3}$.

Kẻ $CK \perp AI$, do $C'C \perp (ABC)$ nên $C'K \perp AI$.

Vậy $\widehat{CKC'}$ là góc giữa $mp(AB'C')$ và $mp(ABC)$.

Ta có $\dfrac{CK}{AJ} = \dfrac{CI}{AI}$;

$$AI^2 = AJ^2 + JI^2 = \frac{a^2}{4} + 3a^2 = \frac{13a^2}{4} \text{ nên } AI = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Từ đó $$CK = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{13}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.$$

Đặt $\widehat{CKC'} = \varphi$ thì $\tan\varphi = \frac{CC'}{CK} = \frac{a}{3} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{a\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\varphi = \frac{2\sqrt{39}}{9}$.

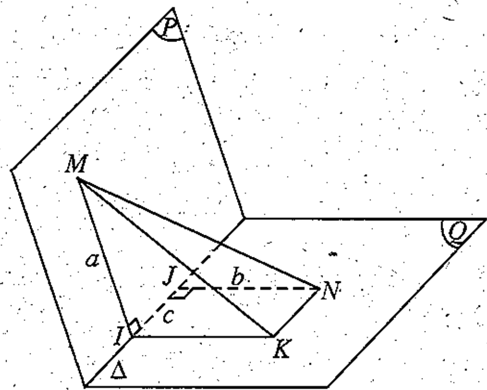
Như thế góc giữa mp($AB'C'$) và mp(ABC) là φ mà $\tan\varphi = \frac{2\sqrt{39}}{9}$.

Tam giác $AB'C'$ có hình chiếu trên mp(ABC) là tam giác ABC mà $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $$S_{AB'C'} = \frac{S_{ABC}}{\cos\varphi} = \frac{a^2\sqrt{79}}{12}.$$

(Tính $\cos\varphi$ nhờ $\tan\varphi = \frac{2\sqrt{39}}{9}$ được $\cos\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$).

48. (h.179)



Hình 179

Trong mp(Q), kẻ qua I đường thẳng song song với JN và kẻ qua N đường thẳng song song với IJ, chúng cắt nhau tại K.

Dễ thấy $MI \perp NK$, tứ giác $IJNK$ là hình chữ nhật.

Như vậy $MI \perp NK$, $IK \perp KN$, từ đó $MK \perp KN$, ngoài ra $IK = b$, $NK = c$.

Vì MI và IK cũng vuông góc với IJ.

Vậy $\widehat{MIK}$ hoặc $180^\circ - \widehat{MIK}$ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Ta có

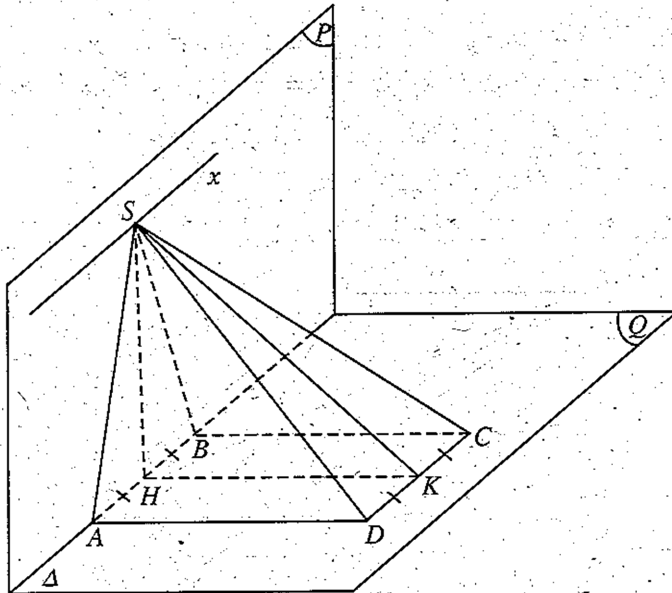
$$MN^2 = MK^2 + KN^2 = MK^2 + c^2;$$

$$MK^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{MIK}.$$

Vậy $$MN = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{MIK} + c^2}$$

hoặc $$MN = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\widehat{MIK} + c^2}.$$

49. a) (h.180)



Hình 180

Dễ thấy mp(SCD) cắt (P) theo giao tuyến Sx, $Sx \parallel AB$.

Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $Sx \perp$ mp(SHK) và tam giác SHK vuông tại H. Suy ra $\widehat{HSK}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (P). Ta có

$$\tan\widehat{HSK} = \frac{HK}{HS} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy nếu gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (P) thì φ là góc thoả mãn

$$\tan\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Tương tự như trên thì $\widehat{HKS}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (Q).

Ta có $$\tan\widehat{HKS} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

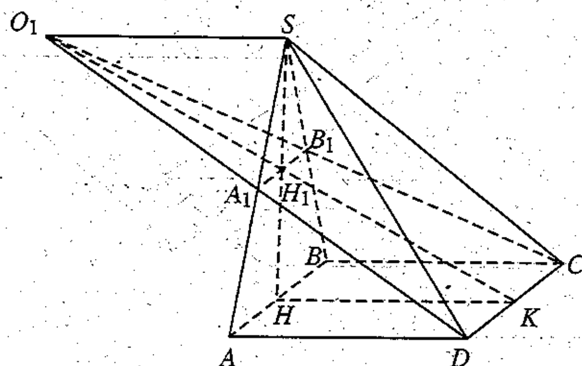
b) (h.181)

Dễ thấy ba điểm O_1, H_1, K thẳng hàng (do H_1 là giao điểm của SH với A_1B_1) và $H_1O_1 = H_1K$. Mặt khác $H_1S = H_1H$. Suy ra $O_1S // HK$.

Do $HK \perp AB$ và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $HK \perp (SAB)$.

Vậy $O_1S \perp (SAB)$, từ đó $O_1S \perp AB$ và $O_1S \perp SA$.

Vì $AB // CD$, từ đó $O_1S \perp SA$ và $O_1S \perp CD$.



Hình 181

Góc giữa hai mặt phẳng $(A_1B_1O_1)$ và (Q) chính là $\widehat{H_1KH}$.

$$\tan\widehat{H_1KH} = \frac{HH_1}{HK} = \frac{a\sqrt{3}}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Góc giữa hai mặt phẳng (A_1B_1O) và (P) chính là $\widehat{HH_1K}$.

Ta có $$\tan\widehat{HH_1K} = \frac{HK}{HH_1} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

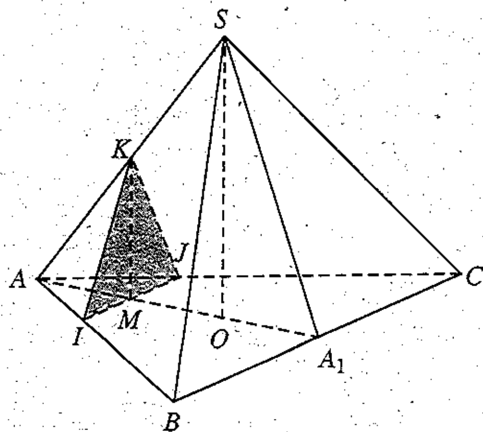
50. a) Vì $SO \perp AA_1$, $BC \perp AA_1$, $(P) \perp AA_1$ và (P) qua M nên (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và song song với SO, BC.

Trường hợp $x = 0$, thiết diện là điểm A.

Trường hợp $0 < x \le \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (h.182).

$(P) \cap (ABC) = IJ$, IJ đi qua điểm M và $IJ // BC$.

$(P) \cap (SAO) = MK$, $MK // SO$.



Hình 182

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi (P) là tam giác IKJ. Dễ thấy IKJ là tam giác cân tại K.

Trường hợp $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (h.183).

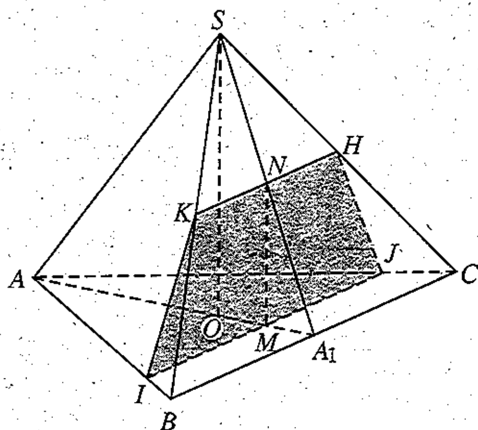
$(P) \cap (ABC) = IJ$, IJ đi qua M và $IJ \parallel BC$

$(P) \cap (SOA_1) = MN$, $MN \parallel SO$

$(P) \cap (SBC) = HK$, HK đi qua N và $HK \parallel BC$.

Vậy thiết diện thu được là hình thang $IJHK$.

Mặt khác M, N lần lượt là trung điểm của IJ, HK ; $MN \parallel SO$; $SO \perp (ABC)$ nên $MN \perp IJ$. Vậy tứ giác $IJHK$ là hình thang cân.



Hình 183

Trường hợp $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, thiết diện là đoạn thẳng BC.

b) *Trường hợp* $0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$S_{IJK} = \frac{1}{2}IJ.MK.$$

$$\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA_1} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO} \Rightarrow MK = 2x\sqrt{3}.$$

Vậy $S_{IJK} = 2x^2$.

Trường hợp $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$S_{IJHK} = \frac{1}{2}(IJ + HK).MN.$$

Ta có $$IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{HK}{BC} = \frac{SN}{SA_1} = \frac{OM}{OA_1} \Rightarrow HK = 2(x\sqrt{3} - a)\ ;$$

$$\frac{MN}{SO} = \frac{MA_1}{A_1O} \Rightarrow MN = 2(3a - 2x\sqrt{3}).$$

Vậy $S_{IJHK} = \frac{2}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(3a - 2x\sqrt{3})$.

Dễ thấy khi $0 < x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$ thì diện tích thiết diện lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Lúc đó diện tích thiết diện bằng $\frac{2a^2}{3}$.

Khi $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì diện tích thiết diện là :

$$S_{IJHK} = \frac{1}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(6a - 4x\sqrt{3}).$$

Từ đó, suy ra diện tích thiết diện lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

Lúc đó diện tích thiết diện bằng $\frac{3a^2}{4}$.

Vậy khi M thay đổi trên AA_1 thì diện tích thiết diện lớn nhất bằng $\frac{3a^2}{4}$, lúc đó M được xác định bởi

$$AM = x = \frac{3a\sqrt{3}}{8} \text{ hay } \frac{AM}{AA_1} = \frac{3}{4}.$$

51. (h.184)

a) Vì $(SEF) \perp (ABCD)$

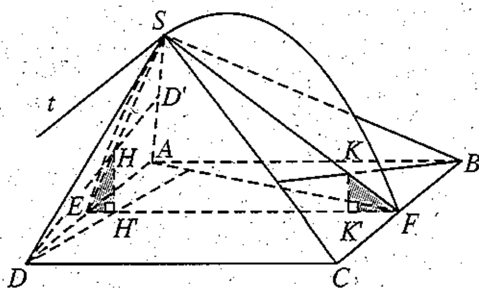
và $AD \perp EF$

nên $AD \perp (SEF)$.

Từ đó $(SEF) \perp (SAD)$.

Tương tự $(SEF) \perp (SBC)$.

Dễ thấy $(SAD) \cap (SBC) = St, St \parallel AD$.



Hình 184

Do $AD \perp (SEF)$, từ đó $St \perp (SEF)$, tức là $\widehat{ESF}$ hoặc $180^{\circ} - \widehat{ESF}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Vì S thuộc đường tròn đường kính EF nên $\widehat{ESF} = 90^{\circ}$.

Vậy $(SAD) \perp (SBC)$.

b) Kẻ $DD' \perp SA$.

Do $SF \perp (SAD) \Rightarrow SF \perp DD'$

$\Rightarrow DD' \perp (SAF) \Rightarrow DD' \perp AF$.

Mặt khác $HH' \perp (ABCD)$ nên $DH' \perp AF$ (định lí ba đường vuông góc).

Ta lại có H' thuộc EF. Vậy H' là trực tâm tam giác ADF, từ đó H' cố định.

Tương tự K' cũng là điểm cố định.

Ta có $\Delta HH'E \backsim \Delta FK'K$, do đó

$$\frac{HH'}{K'F} = \frac{H'E}{K'K} \Rightarrow HH'.KK' = H'E.K'F.$$

Như vậy $HH'.KK'$ không đổi.

Chú ý. Có thể tính $HH'.KK'$ qua a, b.

Thật vậy, $\Delta EDH' \backsim \Delta EFA \Rightarrow \dfrac{EH'}{EA} = \dfrac{DE}{FE} \Rightarrow EH' = \dfrac{a^2}{4b}$.

Tương tự, ta cũng có $FK' = \dfrac{a^2}{4b}$.

Vậy $HH'.KK' = \dfrac{a^4}{16b^2}$ không đổi.

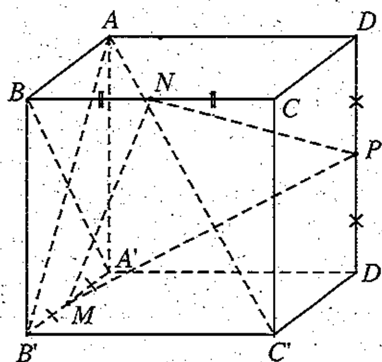
52. (h.185)

a) Ta có $C'B' \perp (ABB'A')$, $B'A \perp A'B$ nên $A'B \perp AC'$ (định lí ba đường vuông góc). Vậy góc giữa AC' và $A'B$ bằng 90°.

b) Ta có

$$NP^2 = NC^2 + CD^2 + DP^2$$
$$= \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}.$$

Tương tự, ta cũng có $MN^2 = MP^2 = \dfrac{3a^2}{2}$.



Hình 185

Vậy MNP là tam giác đều.

Mặt khác $AN^2 = AP^2 = AM^2 = \frac{5a^2}{4}$;

$$C'N^2 = C'P^2 = C'M^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

Từ đó $AC' \perp (MNP)$.

53. (h.186)

a) Vì $AC \,//\, A'C'$ nên góc giữa AC và BC' bằng góc giữa $A'C'$ và BC'.

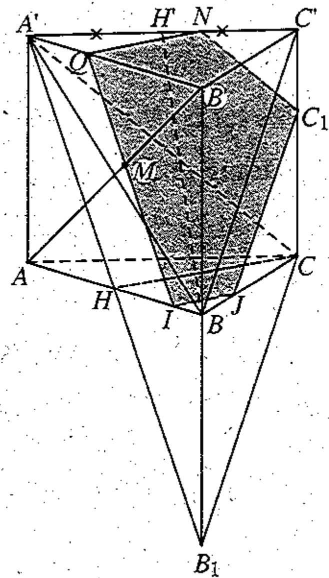
Gọi H' là trung điểm của $A'C'$, do $BA' = BC'$ nên $\widehat{BH'C'} = 90^o$. Vậy $\widehat{H'C'B}$ là góc giữa hai đường thẳng AC và BC'. Đặt $\widehat{H'C'B} = \alpha$ thì

$$\cos\alpha = \frac{H'C'}{BC'} = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

Vậy góc giữa AC và BC' là α mà

$$\cos\alpha = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

b) Lấy B_1 thuộc $B'B$ sao cho $BB' = BB_1$, khi đó $CB_1 \,//\, C'B$. Vậy mp(P) đi qua M, song song với BC' và $A'C$ chính là mặt phẳng đi qua điểm M và song song với mp($A'CB_1$).



Hình 186

Dễ thấy mp($A'CB_1$) cắt hình lăng trụ đã cho theo thiết diện là $A'HC$ còn (P) cắt hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo thiết diện IJC_1NQ, trong đó IQ là đường thẳng đi qua điểm M và song song với $A'H$, còn $IJ \,//\, HC$, $JC_1 \,//\, BC'$, $C_1N \,//\, A'C$.

Ta có $$\frac{C_1C}{C_1C'} = \frac{CJ}{BJ} = \frac{HI}{IB}.$$

Đặt $HI = x$. Do $\frac{MA}{MB'} = \frac{5}{4}$ nên $\frac{AI}{B'Q} = \frac{5}{4}$

hay $$\frac{\frac{a}{2} + x}{a - x} = \frac{5}{4}$$

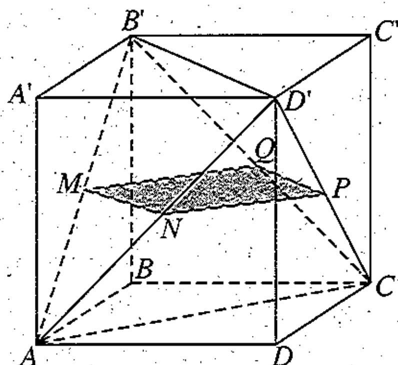
$$\Rightarrow \quad 2a + 4x = 5a - 5x \Rightarrow x = \frac{a}{3}.$$

Khi đó $IB = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$.

Vậy $\frac{C_1C}{C_1C'} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{6}} = 2.$

54. (h.187)

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AB'CD'$ là tứ diện đều có cạnh $a\sqrt{2}$ (a là cạnh của hình lập phương). Dễ thấy thiết diện là tứ giác $MNPQ$, trong đó M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB', AD', $D'C$, $B'C$. Do $AB'CD'$ là tứ diện đều nên $B'D' \perp AC$.



Hình 187

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình vuông cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Từ đó $S_{MNPQ} = \frac{a^2}{2}$.

Chú ý. Có thể chiếu tứ giác $MNPQ$ xuống mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương chiếu $A'A$ được tứ giác $M_1N_1P_1Q_1$ trong đó M_1, N_1, P_1, Q_1 lần lượt là trung điểm của AB, AD, CD, BC và

$$S_{MNPQ} = S_{M_1N_1P_1Q_1} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}.$$

Nếu hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ được thay bởi hình hộp chữ nhật với $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ thì thiết diện thu được vẫn là tứ giác $MNPQ$ và $MNPQ$ là hình thoi có độ dài hai đường chéo MP và NQ lần lượt là b, a. Do đó

$$S_{MNPQ} = \frac{ab}{2}.$$

Chú ý. Thực hiện như phần chú ý ở trên thì

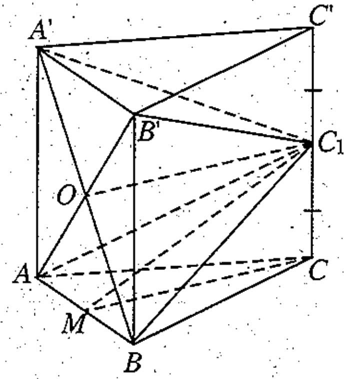
$$S_{MNPQ} = S_{M_1N_1P_1Q_1} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{ab}{2}.$$

55. (h.188)

a) Vì AB // $A'B'$ nên góc giữa C_1B và $A'B'$ là góc giữa C_1B và AB. Dễ thấy $AC_1 = BC_1$ nên AC_1B là tam giác cân. Từ đó $\widehat{ABC_1} < 90^o$. Vậy góc giữa AB và BC_1 là $\widehat{ABC_1}$. Gọi M là trung điểm của AB thì

$$MB = \frac{a}{2},\ BC_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2},\ MB \perp MC_1.$$

Từ đó $\cos\widehat{C_1BA} = \frac{MB}{C_1B} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.



Hình 188

Cũng từ kết quả trên, ta có $(C_1MC) \perp AB$ và C_1MC là tam giác vuông tại C nên góc giữa mp(C_1AB) và (CAB) là $\widehat{C_1MC}$.

Ta có $$\tan\widehat{C_1MC} = \frac{C_1C}{MC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $\widehat{C_1MC} = 30^o$ hay góc giữa mp(C_1AB) và mp(ABC) bằng 30^o.

b) $ABB'A'$ là hình vuông. Dễ thấy $C_1A = C_1B = C_1A' = C_1B' = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó $C_1O \perp AB'$; $C_1O \perp A'B$ $(O = A'B \cap AB')$.

Vậy $C_1.ABB'A'$ là hình chóp tứ giác đều.

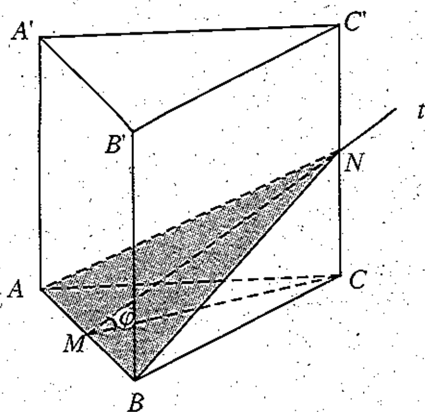
c) Trong mp(M, CC') kẻ tia Mt sao cho $\widehat{CMt} = \varphi$ thì mp(AB, Mt) chính là mặt phẳng (P) phải tìm.

– Nếu $0^o \le \varphi \le \widehat{C'MC}$ thì thiết diện là tam giác ABN (h.189).

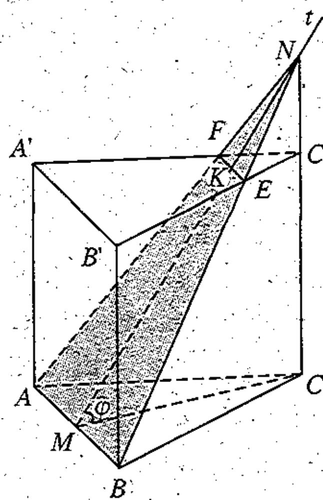
Khi đó $S_{ABN} = \frac{1}{2}AB.MN$

$$AB = a,\ MN = \frac{MC}{\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos\varphi}.$$

Vậy $S_{ABN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$.



Hình 189



Hình 190

– Nếu $\widehat{C'MC} < \varphi < 90^{\circ}$ thì thiết diện là hình thang cân $ABEF$ (h.190).

Khi đó $\quad S_{ABEF} = S_{ABN} - S_{EFN}$.

Ta có $\quad S_{ABN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$

$$\frac{S_{EFN}}{S_{ABN}} = \left(\frac{NE}{NB}\right)^2 = \left(\frac{NC'}{NC}\right)^2 = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\varphi - a\right)^2}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\varphi\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{3}\tan\varphi - 2\right)^2}{3\tan^2\varphi}.$$

Vậy $S_{EFN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}\cdot\dfrac{(\sqrt{3}\tan\varphi - 2)^2}{3\tan^2\varphi}$.

Từ đó $S_{ABEF} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4.\cos\varphi}.\left[1 - \dfrac{\left(\sqrt{3}\tan\varphi - 2\right)^2}{3\tan^2\varphi}\right]$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{12\tan^2\varphi\cos\varphi}.\left(4\sqrt{3}\tan\varphi - 4\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{3\tan\varphi.\sin\varphi}\left(\sqrt{3}\tan\varphi - 1\right).$$

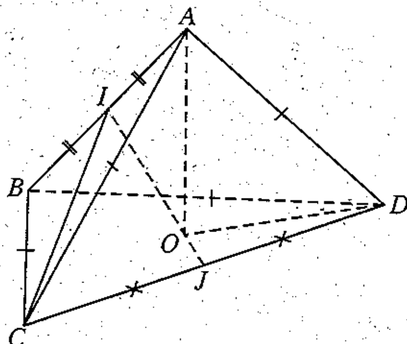
– Nếu $\varphi = 90^{\circ}$ thì thiết diện là hình vuông $ABB'A'$. Khi đó diện tích thiết diện bằng a^2.

§5. Khoảng cách

56. (h.191)

a) Học sinh tự chứng minh.

b) Gọi O là điểm cách đều các đỉnh A, B, C, D thì O thuộc đường thẳng IJ. Khi đó $OA = OD$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $IA^2 + IO^2 = OJ^2 + JD^2$, đặt $IO = x$ ta có đẳng thức



Hình 191

$$\frac{a^2}{4} + x^2 = (a - x)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{4}a.$$

Như vậy, khoảng cách từ điểm O đến mỗi đỉnh của tứ diện $ABCD$ bằng

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

57. (h.192)

a) Gọi H là trung điểm của AB thì $NH \parallel SA$.

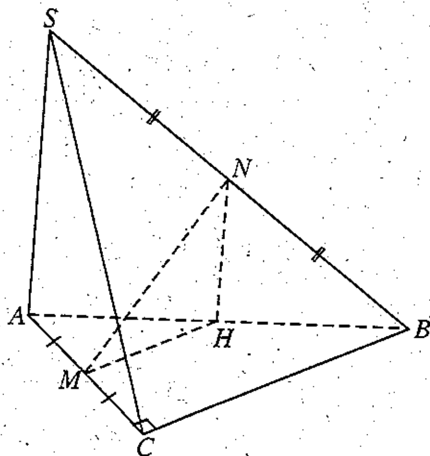
Do $SA \perp (ABC)$ nên $NH \perp (ABC)$, từ đó $\widehat{NHM} = 90^\circ$. Vậy

$$MN^2 = NH^2 + HM^2$$

$$= \frac{SA^2}{4} + \frac{BC^2}{4} = \frac{1}{4}(h^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + b^2}.$$

b) $h = b$.



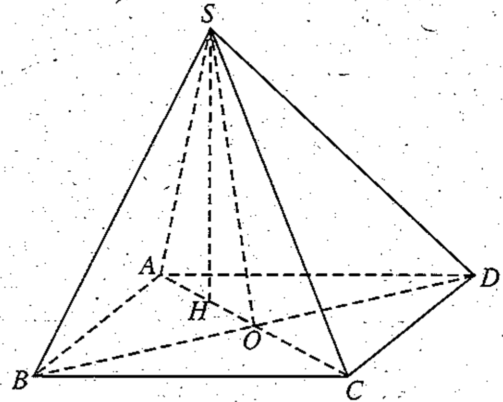
Hình 192

58. (h.193)

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $OA = OC$, $OB = OD$.

Vì $SB = SD = CB = CD$ nên $\Delta BCD = \Delta BSD$, từ đó $SO = OC = OA$.

Vậy SAC là tam giác vuông tại S.



Hình 193

b) $\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ SO \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$,

từ đó $(SAC) \perp (ABCD)$.

Vậy nếu kẻ đường cao SH của tam giác SAC thì $SH \perp (ABCD)$,

do đó $d(S\,;\,\text{mp}(ABCD)) = SH = \dfrac{SA.SC}{AC} = \dfrac{a.x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

59. (h.194)

a) Ta có $CD \perp (SAD)$ nên $(CDA_1) \perp (SAD)$. Từ đó, khi kẻ đường cao SH của tam giác SA_1D thì

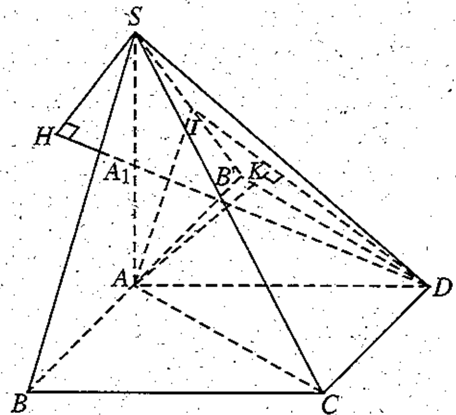
$$SH \perp \text{mp}(CDA_1)$$

và $\quad SH = d(S\,;\,\text{mp}(CDA_1))$.

Ta có

$$SH.A_1D = 2S_{SA_1D} = S_{SAD} = \frac{a^2}{2}.$$

$$A_1D = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



Hình 194

Vậy $SH = \dfrac{a^2}{2} \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

b) Kẻ qua D đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng AB tại B', khi đó $B'D = a\sqrt{2}$, $AB' = a$, $SB' = a\sqrt{2}$, $SD = a\sqrt{2}$.

Vậy $SB'D$ là tam giác đều. Gọi I là trung điểm của SB' thì

$$DI = \frac{a\sqrt{6}}{2},\ SB' \perp (AID)$$

từ đó $\qquad (AID) \perp (SB'D)$.

Vậy khi kẻ đường cao AK của tam giác AID thì AK là khoảng cách từ A đến mp$(SB'D)$. Mặt khác AC // $(SB'D)$ nên AK cũng là khoảng cách giữa AC và SD.

Ta có $AI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AD = a$.

Vì $AD \perp (SAB)$ nên $AD \perp AI$.

Do đó $\qquad AK = \dfrac{AI.AD}{DI} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Vậy khoảng cách giữa AC và SD bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

60. (h.195)

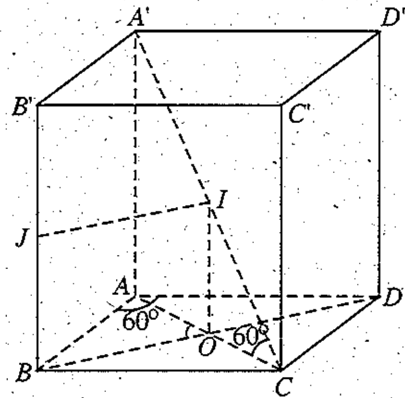
a) Dễ thấy $\widehat{A'CA} = 60^\circ$.

Do $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{A} = 60^\circ$ nên $AC = a\sqrt{3}$.

Đường cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ chính là $A'A$. Mặt khác

$A'A = AC\tan\widehat{A'CA} = a\sqrt{3}\tan 60^\circ = 3a$.

b) Ta có BB' // $(A'AC)$ và $BO \perp (A'AC)$ với O là tâm của hình thoi $ABCD$ (giao điểm của hai đường chéo).



Hình 195

Kẻ OI // AA' và kẻ IJ // BO thì dễ dàng chứng minh được IJ là đường vuông góc chung của BB' và $A'C$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C$ chính là BO. Mặt khác $BO = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $d(BB'; A'C) = \dfrac{a}{2}$.

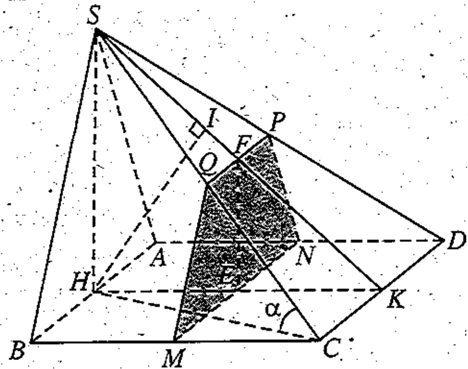
Chú ý. Có thể tìm thấy đường vuông góc chung của BB' và $A'C$ là IJ (I, J lần lượt là trung điểm của $A'C$ và BB') bằng cách xét tứ diện $A'B'BC$ có

$$A'B' = BC = a,$$

$$A'B = B'C = \sqrt{a^2 + BB'^2}.$$

61. (h.196)

a) Gọi H là trung điểm của AB thì $SH \perp AB$, từ đó $SH \perp (ABCD)$. Vậy khoảng cách từ S đến mp$(ABCD)$ là SH, đó là chiều cao của hình chóp.



Hình 196

Ta có $SH = HC\tan\alpha$,

mặt khác $HC^2 = BH^2 + BC^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

hay $$HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $$SH = \frac{a\sqrt{5}}{2}\tan\alpha.$$

b) Gọi K là trung điểm của CD thì $CD \perp (SHK)$, từ đó $(SCD) \perp (SHK)$. Vậy nếu kẻ đường cao HI của tam giác SHK thì HI là khoảng cách từ H đến mp(SCD). Ta có

$$HI = \frac{HS.HK}{SK} = \frac{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\tan\alpha.a}{\sqrt{\dfrac{5a^2}{4}\tan^2\alpha + a^2}} = \frac{a\sqrt{5}\tan\alpha}{\sqrt{5\tan^2\alpha + 4}}.$$

c) Vì SH và CD cùng vuông góc với BC nên SH, CD song song với mặt phẳng trung trực (R) của BC. Khi đó

$(R) \cap (ABCD) = MN$ với $MN \,//\, CD$ và M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD.

$(R) \cap (SHK) = EF$, $EF \,//\, SH$, E là trung điểm của MN.

$(R) \cap (SCD) = PQ$, PQ đi qua điểm F và $PQ \,//\, CD$. Thiết diện $MNPQ$ là hình thang cân.

Ta có $$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).EF$$

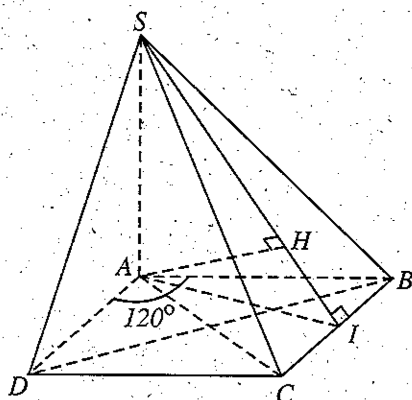
$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{5}}{4}\tan\alpha$$

$$= \frac{3a^2\sqrt{5}}{16}\tan\alpha.$$

62. (h.197)

a) Vì $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD} = 120^o$ nên ABC là tam giác đều. Gọi I là trung điểm của BC thì

$$BC \perp (AIS).$$



Hình 197

Mặt khác SAI là tam giác vuông tại A nên $\widehat{SIA}$ là góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Theo giả thiết $\widehat{SIA} = 60^o$.

Ta có $\qquad BD^2 + AC^2 = 4AB^2$

mà $AC = AB$ nên

$$AB = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow AI = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}.$$

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên SA là đường cao của hình chóp $S.ABCD$. Ta có

$$SA = AI.\tan 60^o.$$

Vậy $\qquad SA = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$

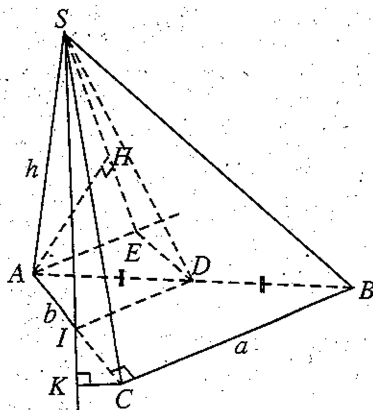
b) Ta có $BC \perp (SAI)$, từ đó $(SAI) \perp (SBC)$. Vậy nếu kẻ đường cao AH của tam giác SAI thì AH là khoảng cách từ A đến mp(SBC). Xét tam giác vuông SAI ta có

$$AH = \frac{SA.AI}{SI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

63. (h.198)

a) Gọi E là giao điểm của đường thẳng qua D, song song với AC và đường thẳng qua A, song song với BC thì AED và SED là hai tam giác vuông tại E, do đó $\widehat{SDE}$ là góc giữa SD và AC.



Hình 198

Đặt $\widehat{SDE} = \alpha$ thì

$$\tan\alpha = \frac{SE}{ED} = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}}{\frac{b}{2}}$$

hay $$\tan\alpha = \frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{b}.$$

b) Vì AC // (SDE) nên $d(AC ; SD) = d(A ; (SDE))$.

Do $DE \perp (SAE)$ nên $(SDE) \perp (SAE)$.

Vậy nếu kẻ đường cao AH của tam giác vuông SAE thì AH là khoảng cách giữa AC và SD.

Ta có $$AH = \frac{AS.AE}{SE} = \frac{h.\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}} = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}.$$

Vậy khoảng cách giữa AC và SD là $AH = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$.

c) Gọi I là trung điểm của AC thì BC // (SDI).

Do đó $d(BC ; SD) = d(C ; (SDI))$.

Ta có $DI \perp (SAC)$ nên $(SDI) \perp (SAC)$.

Vậy khi kẻ đường cao CK của tam giác SIC thì CK là khoảng cách phải tìm.

Ta có $S_{SIC} = \dfrac{bh}{4}$, $SI = \dfrac{1}{2}\sqrt{4h^2 + b^2}$

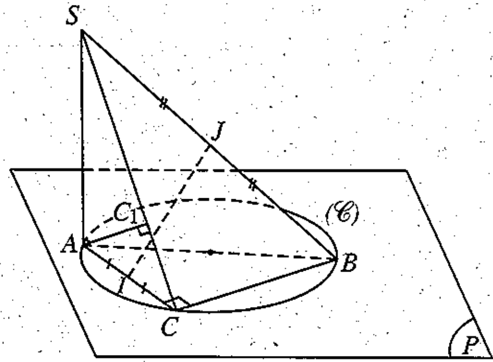
nên $$CK = \frac{\frac{bh}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + b^2}}$$

hay $$CK = \frac{bh}{\sqrt{4h^2 + b^2}}.$$

Vậy khoảng cách giữa BC và SD bằng $\dfrac{bh}{\sqrt{4h^2 + b^2}}$.

64. (h.199)

Cách 1.



Hình 199

Dễ thấy ACB là tam giác vuông tại C mà $SA \perp (ABC)$ nên $\widehat{SCB} = 90^\circ$. Tam giác SAB vuông tại A, tam giác SCB vuông tại C mà J là trung điểm của SB, từ đó $AJ = CJ$. Mặt khác $IA = IC$. Vậy $IJ \perp AC$. Từ đó, IJ là đường vuông góc chung của AC và SB khi và chỉ khi $IS = IB$. Xét các tam giác vuông SAI và BCI ta thấy $IS = IB$ khi và chỉ khi $SA = BC$.

Vậy điểm C thuộc đường tròn đã cho sao cho $BC = h$ thì IJ là đường vuông góc chung của AC và SB. Chú ý rằng có hai điểm C như vậy.

Cách 2.

Xét tứ diện $SABC$ với I, J là trung điểm của AC, SB, ta có IJ là đường vuông góc chung của AC và SB khi và chỉ khi SA bằng CB và SC bằng AB. Xét các tam giác vuông SAC và ACB ta có các đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi SA bằng BC.

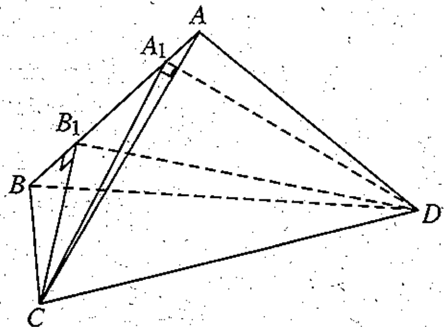
Dễ thấy $d(A\,;\,\text{mp}(SCB)) = AC_1$, trong đó AC_1 là đường cao của tam giác vuông SAC.

Ta có $AC_1 = \dfrac{SA.AC}{SC}$,

mà $AC = \sqrt{4R^2 - h^2}$, $SC = 2R$.

Từ đó, ta có $AC_1 = \dfrac{h.\sqrt{4R^2 - h^2}}{2R}$.

65. a) *Cách 1.* (h.200)



Hình 200

Vì $S_{CAB} = S_{DAB}$ nên $CB_1 = DA_1$ (CB_1, DA_1 tương ứng là đường cao của các tam giác CAB và DAB). Từ đó1 $CA_1 = DB_1$.

Nếu $A_1 \not\equiv B_1$.

Xét tứ diện A_1B_1CD có $A_1C = B_1D$, $CB_1 = DA_1$ nên đường vuông góc chung của A_1B_1, CD là đường thẳng nối trung điểm của A_1B_1 và CD, hay đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD.

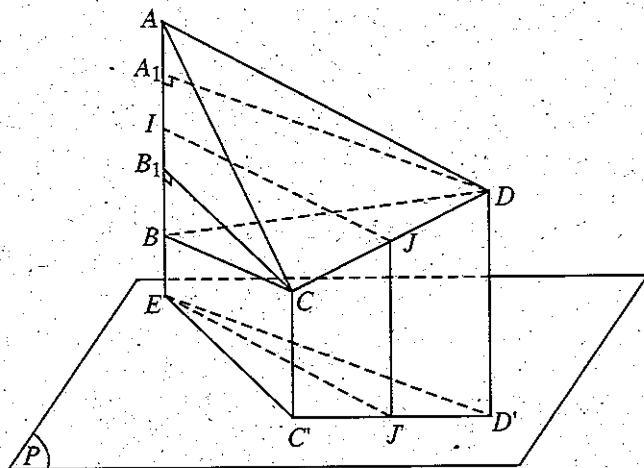
Nếu $A_1 \equiv B_1$ thì kết quả là hiển nhiên.

Cách 2. (h.201)

Kẻ các đường cao CB_1, DA_1 tương ứng của các tam giác CAB và DAB. Xét mp(P) vuông góc với AB. Gọi IJ là đường vuông góc chung của AB và CD thì $IJ \parallel (P)$, $CB_1 \parallel (P)$ và $DA_1 \parallel (P)$.

Chiếu tứ diện đã cho lên (P) thì các điểm A, B, A_1, B_1, I cùng có hình chiếu là E. Các điểm C, J, D lần lượt có hình chiếu là C', J', D'. Dễ thấy J' thuộc $C'D'$, $EC' = CB_1$, $ED' = A_1D$, từ đó $EC' = ED'$.

Mặt khác do $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$ nên suy ra $EJ' \perp C'D'$.



Hình 201

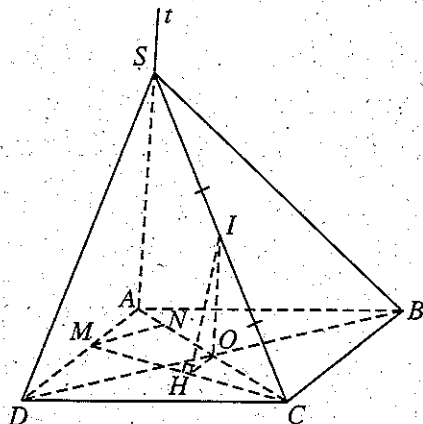
Như vậy $C'ED'$ là tam giác cân tại E và nhận EJ' là đường cao, từ đó $J'C' = J'D'$.

Do vậy $JC = JD$, tức là đường vuông góc chung của AB, CD đi qua trung điểm của CD.

b) Vì bốn mặt của tứ diện $ABCD$ có diện tích bằng nhau nên $S_{CAB} = S_{DAB}$ và $S_{BCD} = S_{ACD}$. Do đó theo câu a) thì đường vuông góc chung của AB và CD là đường thẳng IJ, trong đó I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó $AC = BD$, $BC = AD$.

Tương tự như trên ta có $AC = BD$ và $AB = CD$. Vậy $ABCD$ là tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau, tức là $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$.

66. (h.202)



Hình 202

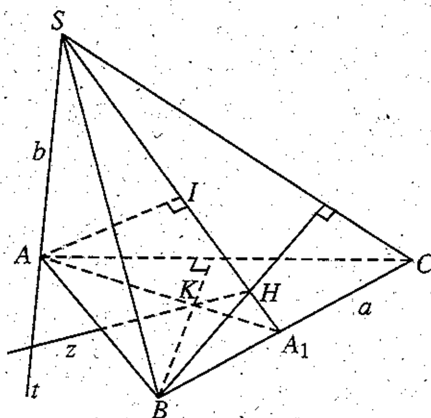
a) Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $DB \perp (SAC)$. Kẻ MN song song với DB ($N \in AC$) thì $MN \perp (SAC)$, do đó khoảng cách từ M đến mp(SAC) bằng MN. Dễ thấy

$$MN = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

b) Ta có $IO \parallel SA$,

do $SA \perp (ABCD)$ nên $IO \perp (ABCD)$. Do $IH \perp MC$ nên $HO \perp HC$ (định lí ba đường vuông góc). Vậy $\widehat{OHC} = 90^\circ$, tức là H thuộc đường tròn đường kính OC nằm trong mặt phẳng chứa hình vuông $ABCD$.

67. (h.203)



Hình 203

a) Gọi A_1 là trung điểm của BC thì

$$BC \perp \text{mp}(SAA_1),$$

từ đó $\quad (SAA_1) \perp (SBC)$.

Kẻ đường cao AI của tam giác SAA_1 thì $AI \perp (SBC)$. Từ đó, khoảng cách từ A đến mp(SBC) bằng AI.

Ta có $$AI = \frac{AS.AA_1}{SA_1} = \frac{b.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{b^2 + \frac{3a^2}{4}}}.$$

Vậy $$AI = \frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}.$$

b) Vì H là trực tâm tam giác SBC nên H thuộc SA_1. Do $(SAA_1) \perp (SBC)$ và $Hz \perp (SBC)$ nên Hz nằm trong mp(SAA_1). Gọi K là giao điểm của Hz và AA_1, ta có $KH \perp (SBC)$, $BH \perp SC$ nên $KB \perp SC$ (định lí ba đường vuông góc).

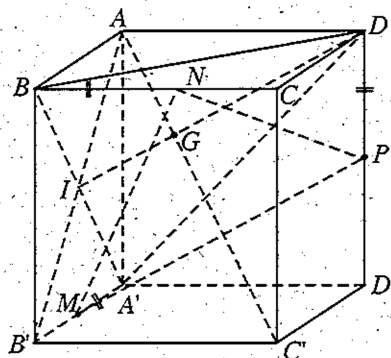
Mặt khác $SA \perp (ABC)$, $BK \perp SC$ nên $BK \perp AC$ (định lí ba đường vuông góc). Như vậy K là trực tâm của tam giác ABC.

Vậy khi S di động trên đường thẳng At vuông góc với mp(ABC) thì đường thẳng Hz đi qua điểm cố định là trực tâm K của tam giác ABC.

68. (h.204)

a) Góc giữa AC' và $A'B$ bằng 90^o. Vì AC' vuông góc với $(A'BD)$ tại trọng tâm G của tam giác $A'BD$ và $A'BD$ là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên

$$d(AC' ; A'B) = GI = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



Hình 204

b) Đặt $A'M = BN = DP = x$ thì

$$AN^2 = a^2 + x^2$$
$$AP^2 = a^2 + x^2$$
$$AM^2 = a^2 + x^2.$$

Suy ra $\quad AM = AN = AP$.

Mặt khác

$$NP^2 = NC^2 + CD^2 + DP^2 = (a-x)^2 + a^2 + x^2 ;$$
$$NM^2 = NB^2 + BB'^2 + B'M^2 = x^2 + a^2 + (a-x)^2.$$

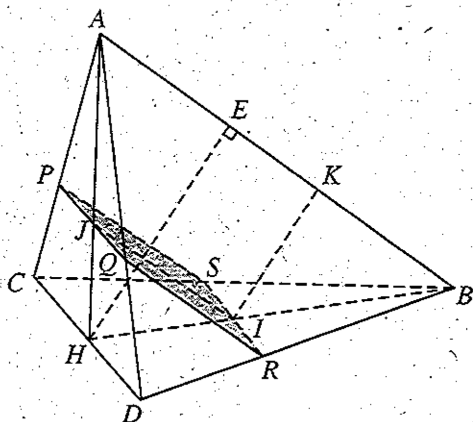
Tương tự, ta có $MN = NP = PM$.

Do đó $A.MNP$ là hình chóp đều. Khi ấy đường thẳng nối A với trọng tâm tam giác MNP sẽ vuông góc với mp(MNP). Tương tự như trên ta cũng có đường thẳng nối C' với trọng tâm của tam giác MNP sẽ vuông góc với mp(MNP). Vậy trọng tâm tam giác MNP luôn thuộc đường thẳng cố định là AC'.

69. (h.205)

Dễ thấy thiết diện là hình bình hành $PQRS$. Mặt khác theo giả thiết $CD \perp (AHB)$ nên $CD \perp AB$. Vậy $PQRS$ là hình chữ nhật.

Kẻ $HE \perp AB$ thì $HE \perp (PQRS)$. Kẻ $IK \parallel HE$ thì $IK \perp (PQRS)$. Do $AB \parallel (PQRS)$ và $d(B ; (PQRS)) = d$ nên $IK = d$.



Hình 205

Ta có $$HE = \frac{AH.HB}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - BH^2}.HB}{AB}$$
$$= \frac{a\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}.$$

Ta có $$\frac{IK}{HE} = \frac{BI}{BH} = \frac{RS}{CD}$$

suy ra $$RS = \frac{da}{a\sqrt{15}}.4\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}d}{\sqrt{15}};$$

$$BI = \frac{IK.BH}{HE} = \frac{d.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}d}{\sqrt{5}}.$$

Mặt khác $$\frac{IJ}{AB} = \frac{HI}{HB} = \frac{(HB - IB)}{HB};$$

từ đó $$IJ = \frac{AB(HB - IB)}{HB} = \frac{\sqrt{2}(a\sqrt{15} - 4\sqrt{2}d)}{\sqrt{15}}.$$

Vậy $$S_{PQRS} = RS.IJ = \frac{8}{15}d(a\sqrt{15} - 4\sqrt{2}d).$$

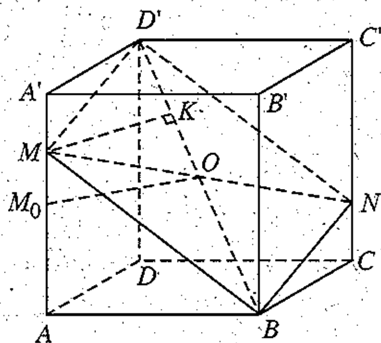
70. (h.206)

Xét (P) là mặt phẳng chứa một đường chéo, chẳng hạn đường chéo BD' của hình lập phương.

Nếu (P) chứa $D'A'$ thì thiết diện có diện tích là $a^2\sqrt{2}$.

Tương tự, nếu (P) chứa $D'C'$ hoặc $D'D$ thì thiết diện cũng có diện tích là $a^2\sqrt{2}$.

Ta xét (P) cắt AA' tại điểm M. Gọi O là tâm hình lập phương thì MO cắt CC' tại N. Do đó thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi (P) là $BMD'N$, đó là hình bình hành.



Hình 206

Ta có
$$S_{BMD'N} = BD'.MK = d.MK$$
(d là độ dài đường chéo của hình lập phương).

Vậy $S_{BMD'N}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MK nhỏ nhất, tức MK là đường vuông góc chung của BD' và AA'. Dễ thấy OM_0 là đường vuông góc chung của BD' và AA', trong đó M_0 là trung điểm của AA', OM_0 bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy lúc đó

$$S_{BMD'N} = a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Chú ý. Khi (P) cắt $A'B'$ hoặc $B'C'$ thì cách giải quyết bài toán cũng như trên và ta có diện tích thiết diện nhỏ nhất trong trường hợp đó cũng là $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Dễ thấy $$\frac{a^2\sqrt{6}}{2} < a^2\sqrt{2}.$$

Vậy nếu (P) qua đường chéo BD' và qua trung điểm một cạnh của hình lập phương không đi qua B và D', thì diện tích thiết diện nhỏ nhất và có giá trị bằng $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Bài tập ôn tập chương III

71. (h.207)

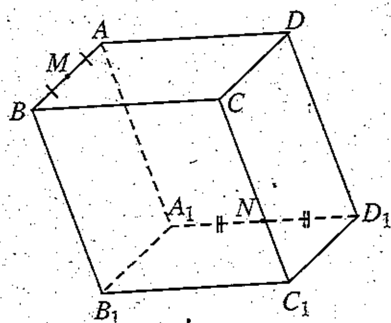
a) Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

P là giao điểm của mp(CMN) với đường thẳng B_1C_1 khi và chỉ khi C, M, N, P thuộc một mặt phẳng và P thuộc đường thẳng B_1C_1.

Ta có các điểm M, N, C, P thuộc một mặt phẳng nên tồn tại các số x, y, z sao cho

$$x + y + z = 1 \qquad (*)$$

và $$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AN} + z\overrightarrow{AC}.$$



Hình 207

Ta có $$\overrightarrow{AP} = x.\frac{\vec{b}}{2} + y\left(\vec{a} + \frac{\vec{c}}{2}\right) + z(\vec{b} + \vec{c})$$

$$= y\vec{a} + \left(\frac{x}{2} + z\right)\vec{b} + \left(\frac{y}{2} + z\right)\vec{c}. \quad (1)$$

Vì P thuộc đường thẳng B_1C_1 nên $\overrightarrow{B_1P} = t\overrightarrow{B_1C_1}$,

từ đó $$\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \vec{a} + t\vec{c}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) và do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên

$$\begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{x}{2} + z = 1 \\ \dfrac{y}{2} + z = t. \end{cases} \quad (**)$$

Kết hợp (*) và (**), ta có

$$\begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{x}{2} + z = 1 \\ \dfrac{y}{2} + z = t \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad z = -x \Rightarrow \frac{x}{2} - x = 1 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow \quad z = 2, t = \frac{5}{2}.$$

Vậy giao điểm của mp(CMN) với đường thẳng B_1C_1 là điểm P xác định bởi

$$\overrightarrow{B_1P} = \frac{5}{2}\overrightarrow{B_1C_1}.$$

Tương tự như trên, nếu gọi Q là giao điểm của mp(CMN) với đường thẳng B_1D thì ta có $\quad x + y + z = 1$

và $$\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AN} + z\overrightarrow{AC}$$

$$= y\vec{a} + \left(\frac{x}{2} + z\right)\vec{b} + \left(\frac{y}{2} + z\right)\vec{c}.$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{b} + \vec{a} + t\overrightarrow{B_1D} = \vec{a} + \vec{b} + t(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

$$= (1 - t)\ \vec{a} + (1 - t)\vec{b} + t\vec{c}.$$

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y = 1 - t \\ \dfrac{x}{2} + z = 1 - t \\ \dfrac{y}{2} + z = t \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} - y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - z = 2 - 4z \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{9},\ y = \frac{4}{9},\ t = \frac{5}{9}.$$

Vậy giao điểm Q của đường thẳng B_1D với mp(CMN) được xác định bởi

$$\overrightarrow{B_1Q} = \frac{5}{9}\overrightarrow{B_1D}.$$

b) Từ kết quả câu a), ta có

$$\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{5}{9}\vec{c}.$$

72. (h.208)

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Theo giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{B'B_1} = -\frac{3}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{C'C_1} = -\frac{3}{4}\vec{a}.$$

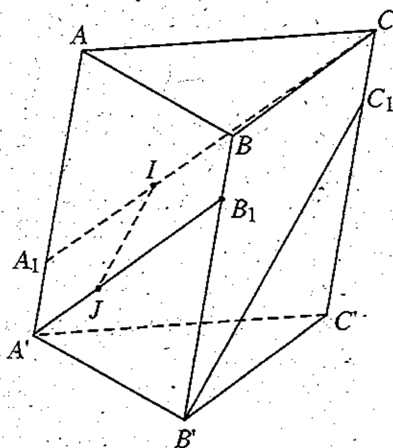
Ta có

$$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1}$$

$$= \frac{3}{4}\vec{a} - \vec{c}\ ;$$

$$\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B_1}$$

$$= -\frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b}\ ;$$



Hình 208

$$\overrightarrow{B'C_1} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C_1}$$
$$= -\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

Vì I thuộc CA_1 nên $\overrightarrow{CI} = t\overrightarrow{CA_1} = \frac{3}{4}t\vec{a} - t\vec{c}$.

Do J thuộc $A'B_1$ nên $\overrightarrow{A'J} = m\overrightarrow{A'B_1} = -\frac{3}{4}m\vec{a} + m\vec{b}$.

Mặt khác $\quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'J}$

$$= -\frac{3}{4}t\vec{a} + t\vec{c} + \vec{a} - \vec{c} - \frac{3}{4}m\vec{a} + m\vec{b}$$
$$= \left(1 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}m\right)\vec{a} + m\vec{b} + (t-1)\vec{c}.$$

Ta có $\quad IJ \,//\, B'C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{B'C_1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}m = -\frac{3}{4}k \\ m = -k \\ t - 1 = k. \end{cases}$$

Suy ra $\quad 1 - \frac{3}{4}(k+1) + \frac{3}{4}k = -\frac{3}{4}k$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4}k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow t = \frac{2}{3}, m = \frac{1}{3}.$$

Vậy điểm I thuộc A_1C được xác định bởi $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA_1}$

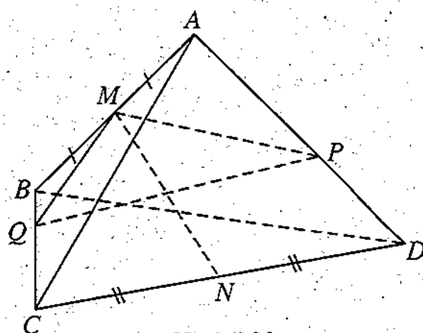
và J thuộc $A'B_1$ được xác định bởi $\overrightarrow{A'J} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B_1}$.

Khi đó, ta có $\frac{IJ}{B'C_1} = \frac{1}{3}$.

73. (h.209)

MN cắt PQ nên các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng. Điều này tương đương với có các số x, y sao cho

$$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}.$$



Hình 209

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Khi đó $$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}$$

$$= \frac{1}{1-k}\left[\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{k}{2}(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{a})\right]$$

$$= \frac{1}{1-k}\left[\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b})\right]$$

$$= \frac{1}{2(1-k)}\left[(1+k)\vec{a} + (k-1)\vec{b}\right]$$

$$= \frac{k+1}{2(1-k)}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + t(-\vec{b} + \vec{c})$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + t\vec{c}.$$

Từ đó ta có $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k+1}{2(1-k)} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y \\ -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}x + y\left(\dfrac{1}{2} - t\right) \\ 0 = \dfrac{1}{2}x + yt. \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -1, x = \frac{k+1}{k-1} + 1 = \frac{2k}{k-1}$$

$$t = \frac{k}{k-1}.$$

Như vậy $\qquad \overrightarrow{BQ} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{BC} = \frac{k}{k-1}(\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC})$

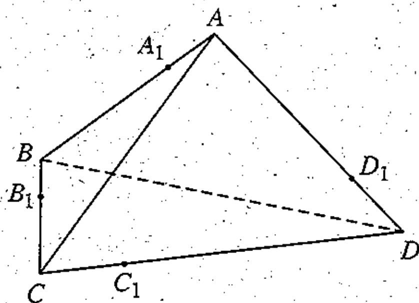
$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{k}{k-1}\right)\overrightarrow{BQ} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{QC}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\overrightarrow{BQ} = k.\overrightarrow{QC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{QB}{QC} = |k|.$$

74. *Cách 1.* (h.210) Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi có các số m, n để

$$\overrightarrow{D_1B_1} = m\overrightarrow{D_1A_1} + n\overrightarrow{D_1C_1}. \qquad (1)$$



Hình 210

Từ hệ thức $\overrightarrow{B_1B} = k\overrightarrow{B_1C}$, ta có

$$\overrightarrow{D_1B_1} = \frac{\overrightarrow{D_1B} - k\overrightarrow{D_1C}}{1-k}$$

hay $\quad \overrightarrow{D_1B_1} = \frac{\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DB} - k(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC})}{1-k} = \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c}.$

Mặt khác $\quad \overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A} = k(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DA}) \Rightarrow \overrightarrow{D_1D} = \frac{k}{1-k}\vec{a}.$

Vậy $\quad \overrightarrow{D_1B_1} = \frac{k}{1-k}\vec{a} + \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c}. \qquad (2)$

Tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{D_1A_1} = \frac{\overrightarrow{D_1A} - k\overrightarrow{D_1B}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DA} - k(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DB})}{1-k}$$

$$= \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b}$$

hay $\quad \overrightarrow{D_1A_1} = \frac{k+1}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b} \qquad (3)$

$$\overrightarrow{D_1C_1} = \frac{\overrightarrow{D_1C} - k\overrightarrow{D_1D}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC} - k\overrightarrow{D_1D}}{1-k} = \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{1-k}\vec{c}$$

do đó $\overrightarrow{D_1C_1} = \frac{k}{1-k}\vec{a} + \frac{1}{1-k}\vec{c}$. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) ta có các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc mặt phẳng khi và chỉ khi

$$k\vec{a} + \vec{b} - k\vec{c} = (mk + nk + m)\vec{a} - mk\vec{b} + n\vec{c}.$$

Do $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi có các số m, n để

$$\begin{cases} k = mk + nk + m \\ 1 = -mk \\ -k = n. \end{cases}$$

Điều đó tương đương với $k = -1 - k^2 - \frac{1}{k}$ hay $k^3 + k^2 + k + 1 = 0$ hay $k = -1$.

Vậy với $k = -1$ thì các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng.

Cách 2. Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Tìm k để các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng tương đương với việc tìm k để có biểu diễn

$\overrightarrow{DA_1} = x\overrightarrow{DB_1} + y\overrightarrow{DC_1} + z\overrightarrow{DD_1}$, với $x + y + z = 1$. (a)

Từ hệ thức $\overrightarrow{A_1A} = k\overrightarrow{A_1B}$ ta có

$$\overrightarrow{DA_1} = \frac{\overrightarrow{DA} - k\overrightarrow{DB}}{1-k} = \frac{1}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b}. \quad (1)$$

Tương tự như trên, ta cũng có

$$\overrightarrow{DB_1} = \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c}. \quad (2)$$

Mặt khác từ $\overrightarrow{C_1C} = k\overrightarrow{C_1D}$ ta có

$$\overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{C_1D} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC_1} = \frac{1}{1-k}\vec{c}. \quad (3)$$

Tương tự từ $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A}$, ta cũng có

$$\overrightarrow{D_1D} = \frac{k}{1-k}\vec{a}. \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4), ta suy ra

$$\overrightarrow{DA_1} = -\frac{1}{k}\overrightarrow{DD_1} - k\overrightarrow{DB_1} - k^2\overrightarrow{DC_1}. \quad \text{(b)}$$

Từ (a) và (b) ta có các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi

$$-\frac{1}{k} - k - k^2 = 1 \Leftrightarrow k^3 + k^2 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Vậy với $k = -1$ thì các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng.

75. a) *Cách 1.* Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \frac{BD^2}{2}.$$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD$. Vậy $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Cách 2. $MA^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2$

$$= 2\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2$$

$$= 2(MO^2 + OA^2) (\text{do } OA = OC, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}).$$

Tương tự như trên, ta có $MB^2 + MD^2 = 2(MO^2 + OB^2)$.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $OA = OB$.

Vậy $$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

b) Gọi I, J lần lượt trung điểm của AC và BD, khi đó :

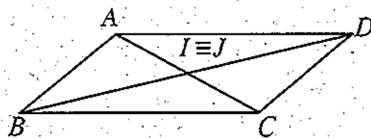
$$MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB})^2 - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})^2$$

$$= 2MI^2 + IA^2 + IC^2 - 2MJ^2 - JB^2 - JD^2$$

$$= 2(MI^2 - MJ^2) + \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2).$$

• Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $I \equiv J$. Khi đó

$$MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2)$$



Hình 211

tức là $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

• Ngược lại, nếu $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M thì $MI^2 - MJ^2$ cũng là hằng số. Khi đó chọn M lần lượt là điểm I và điểm J thì $II^2 - IJ^2 = JI^2 - JJ^2$, suy ra $-IJ^2 = IJ^2$, tức là $IJ = 0$ hay $I \equiv J$.

Vậy $ABCD$ là hình bình hành (h.211).

Chú ý. Cũng có thể sử dụng các công thức

$$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$MB^2 + MD^2 = 2MJ^2 + \frac{BD^2}{2}$$

và từ đó ta có $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 = 2(MI^2 - MJ^2) + \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2)$ rồi lí luận như trên để đi đến kết quả.

76. (h.212)

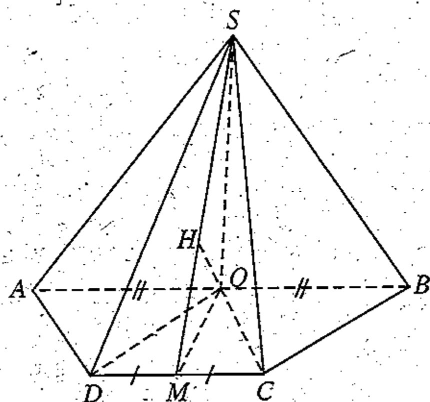
a) AO và DC song song và bằng nhau nên $AD = OC$ mà $AD = AO$, từ đó $OA = OC$.

Tương tự, ta có $OB = OD$.

Do đó $OA = OB = OC = OD$.

Mặt khác SO vuông góc với mp($ABCD$) nên mọi điểm trên SO cách đều các điểm A, B, C, D. Vì SA và SO cắt nhau nên xét đường trung trực của SA trong mp(SAB) thì nó cắt đường thẳng SO tại một điểm, đó là điểm cách đều năm đỉnh S, A, B, C, D. Vì $SO = a$, $AO = a$ nên $OS = OA$.

Vậy O là điểm cách đều các điểm S, A, B, C, D. Do đó, khoảng cách từ điểm cách đều phải tìm đến các đỉnh bằng a.



Hình 212

b) Gọi M là trung điểm của CD thì $OM \perp DC$

từ đó $CD \perp$ mp(OMS).

Vậy nếu kẻ OH vuông góc với SM thì $DC \perp OH$,

từ đó $OH \perp$ mp(SCD).

Như thế $\widehat{HSO}$ là góc giữa SO và mp(SCD).

Nhận thấy $\widehat{HSO} = \widehat{MSO}$.

Cách 1. Xét tam giác SOM vuông tại O ta có

$$\tan\widehat{HSO} = \tan\widehat{MOS} = \frac{OM}{OS} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cách 2.

Ta có $$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2}.$$

Vậy $$OH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Do đó $$\sin\widehat{HSO} = \frac{OH}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{a} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy góc giữa SO và mặt phẳng (SCD) là α mà

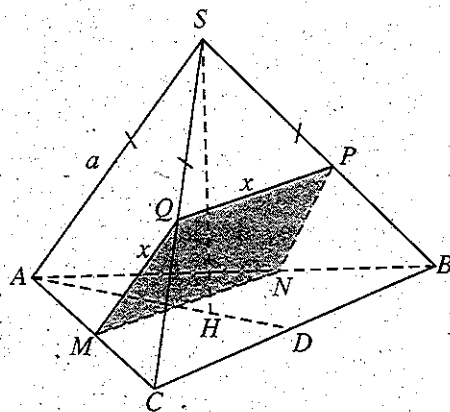
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}\ (0^\circ < \alpha < 90^\circ).$$

77. (h.213)

Giả sử H là tâm của tam giác đều. Từ $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABC)$ và $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

Giả sử mặt phẳng song song với SA, CD và thiết diện thu được là hình vuông $MNPQ$.

Khi đó, nếu kí hiệu cạnh hình vuông là x thì



Hình 213

$$\frac{x}{SA} = \frac{CQ}{CS} \quad (1)$$

$$\frac{x}{BC} = \frac{SQ}{SC}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$x\left(\frac{1}{SA}+\frac{1}{BC}\right)=\frac{CQ+QS}{CS}=1$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{SA.BC}{SA+BC}=\frac{a.BC}{a+BC}.$$

Mặt khác $\quad HA = SA\cos 60^{o} = \frac{a}{2}$

mà $\quad HA=\frac{BC\sqrt{3}}{3}.$

Suy ra $\quad BC=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Từ đó $\quad x=\frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a+\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right).$

Vậy $\quad S_{MNPQ}=\left[a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)\right]^{2}=3a^{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2}.$

78. (h.214)

a) Dễ thấy $BC=\frac{10a}{\sqrt{3}}.$

$SA^2 = SO^2 + AO^2$

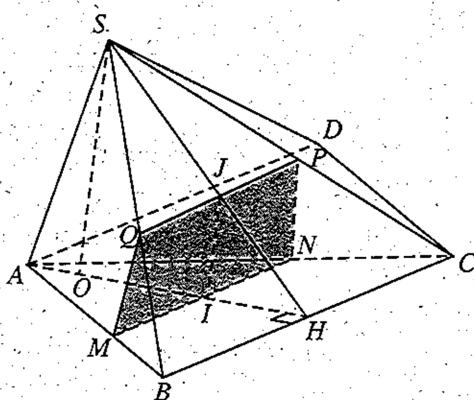
$= 4a^2 + a^2 = 5a^2.$

$SC^2 = SO^2 + OH^2 + HC^2$

$= 4a^2 + 16a^2 + \frac{25a^2}{3}$

$= \frac{85a^2}{3}.$

$AC^2 = \frac{100a^2}{3}.$



Hình 214

Ta có

$SA^2 + SC^2 = AC^2.$

Vậy $\quad SA \perp SC.$

+ Kẻ AD song song và bằng BC (hai tia AD, BC cùng chiều) thì góc giữa AB và SC chính là góc giữa CD và SC, đó là $\widehat{SCD}$ hoặc $180^{o}-\widehat{SCD}$.

Dễ thấy $SA \perp BC$, do $AD \,//\, BC$ nên $SA \perp AD$, tức là tam giác SAD vuông.

Do đó $SD^2 = SA^2 + AD^2 = 5a^2 + \frac{100a^2}{3} = \frac{115a^2}{3}$,

mặt khác $SD^2 = SC^2 + DC^2 - 2SC.DC\cos\widehat{SCD}$

nên ta có $\frac{115a^2}{3} = \frac{85a^2}{3} + \frac{100a^2}{3} - 2\cdot\frac{a\sqrt{85}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{10a}{\sqrt{3}}\cos\widehat{SCD}$

$\Rightarrow \quad \cos\widehat{SCD} = \frac{7}{2\sqrt{85}}$.

Vậy góc giữa AB và SC là α mà

$$\cos\alpha = \frac{7}{2\sqrt{85}}.$$

b) Do $(\alpha) \perp AH$, $SO \perp AH$ và $BC \perp AH$ nên SO và BC cùng song song với (α). Khi đó $(\alpha) \cap (ABC) = MN$, MN qua I và $MN \,//\, BC$

$(\alpha) \cap (SOH) = IJ$, $IJ \,//\, SO$

$(\alpha) \cap (SBC) = PQ$, PQ qua J và $PQ \,//\, BC$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang cân với chiều cao JI.

Ta có $IJ = \frac{1}{2}SO = a$.

$$PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{5a}{\sqrt{3}}.$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{3a}{5a} \Rightarrow MN = \frac{10a.3}{\sqrt{3}.5} = 2a\sqrt{3}.$$

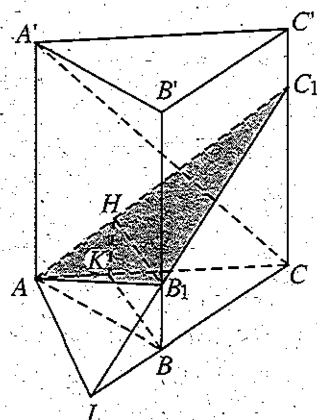
Suy ra $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).IJ$

$$= \frac{1}{2}\left(2a\sqrt{3} + \frac{5a}{\sqrt{3}}\right).a = \frac{11a^2}{2\sqrt{3}}.$$

79. (h.215)

a) (P) cắt $(ACC'A')$ theo giao tuyến đi qua A và vuông góc với $A'C$.

Do $AA' = h > AC = \sqrt{a^2 + c^2}$ nên giao tuyến đó cắt CC' tại C_1, C_1 thuộc cạnh CC'. Mặt khác (P) cắt (ABC) theo giao tuyến



Hình 215

vuông góc với $A'C$, tức là giao tuyến đó vuông góc với AC, giao tuyến này cắt BC tại I. Khi đó IC_1 cắt BB' tại B_1. Thiết diện là tam giác AB_1C_1.

b) Tính diện tích thiết diện

Dễ thấy $\varphi = \widehat{CAC_1}$ là góc giữa (P) và (ABC), ngoài ra $\widehat{C_1AC} = \widehat{AA'C}$,

$$\cos\varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2 + c^2 + h^2}}.$$

Ta có $\quad S_{ABC} = S_{AB_1C_1}\cos\varphi$

$$\Rightarrow \quad S_{AB_1C_1} = \frac{S_{ABC}}{\cos\varphi} = \frac{ac}{2h}\sqrt{a^2 + c^2 + h^2}.$$

Chú ý. Có thể tính $S_{AB_1C_1}$ bằng cách tính AC_1 và đường cao B_1H của tam giác đó. Dễ thấy B_1H song song với BK, trong đó $BK \perp AC$ vì B_1H và BK cùng vuông góc với $(ACC'A')$.

Ngoài ra $B_1H = BK = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$

$$\Delta AA'C \backsim \Delta ACC_1 \Rightarrow AC_1 = \frac{A'C.AC}{AA'} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 + h^2}.\sqrt{a^2 + c^2}}{h}.$$

Từ đó, tính được diện tích tam giác AB_1C_1.

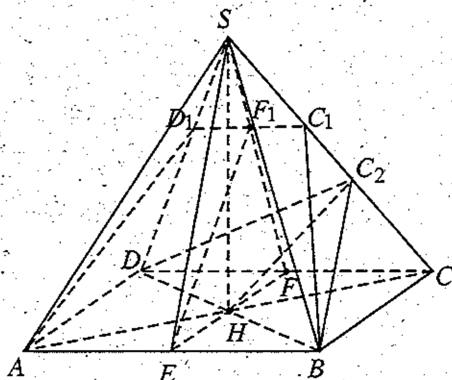
80. (h.216)

a) • Gọi E là trung điểm của AB và H là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi ấy SHE là tam giác vuông tại H và $AB \perp (SHE)$. Vậy góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SEH}$.

Đặt $\widehat{SEH} = \alpha$ thì $\tan\alpha = \dfrac{2h}{a}$ $(SH = h)$.

Tương tự như trên ta có góc giữa các mặt phẳng chứa mỗi mặt bên còn lại của hình chóp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ cũng bằng α và $\tan\alpha = \dfrac{2h}{a}$.

• Khi $h = a$ thì góc tạo bởi mỗi mặt phẳng chứa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng α và $\tan\alpha = 2$.



Hình 216

Kẻ $HC_2 \perp SC$ thì ta có $mp(BC_2D) \perp SC$.

Vậy góc giữa mp(SBC) và mp(SDC) bằng $\widehat{BC_2D}$ hoặc $180^\circ - \widehat{BC_2D}$.

Ta tính $\widehat{BC_2D}$.

Dễ thấy $$HC_2 = \frac{HC.HS}{SC}$$

$$= \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{\sqrt{\frac{2a^2}{4} + a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Từ đó $$BC_2^2 = HB^2 + HC_2^2$$

$$= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{3} = \frac{5a^2}{6}.$$

Đặt $\beta = \widehat{BC_2D}$ thì

$$BD^2 = BC_2^2 + DC_2^2 - 2BC_2.DC_2 \cos\beta$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2 = \frac{5a^2}{6} + \frac{5a^2}{6} - 2.\frac{5a^2}{6}\cos\beta = 2.\frac{5a^2}{6}(1 - \cos\beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{5}{6}(1 - \cos\beta) \Rightarrow \cos\beta = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}.$$

Vậy góc giữa mp(SBC) và mp(SCD) là $180^\circ - \beta$ mà $\cos\beta = -\frac{1}{5}$.

Tương tự như trên, ta có góc giữa hai mặt chứa hai mặt bên liên tiếp cũng được xác định bởi β mà $\cos\beta = -\frac{1}{5}$.

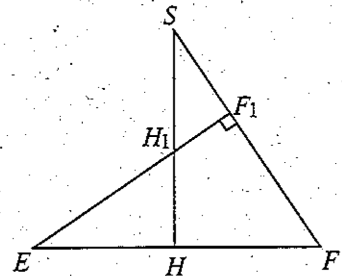
b) Vì (P) đi qua A và song song với CD nên (P) chứa cạnh AB. Do (P) vuông góc với (SCD) nên (P) chứa EF_1 vuông góc với mặt phẳng (SCD). Dễ thấy F_1 thuộc SF, trong đó F là trung điểm của CD.

Mặt khác (P) chia tam giác SCD thành hai phần mà tỉ số diện tích hai phần bằng $\frac{1}{8}$ nên $\frac{SF_1}{SF} = \frac{1}{3}$.

Khi ấy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là hình thang cân ABC_1D_1 mà $C_1D_1 = \frac{1}{3}CD = \frac{a}{3}$ với đường cao EF_1.

Ta có $$S_{ABC_1D_1} = \frac{1}{2}(AB + C_1D_1).EF_1$$
$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{3}\right)EF_1 = \frac{2a}{3}.EF_1.$$

Ta tính EF_1 (h.217)



Hình 217

Vì $SH_1 . SH = SF_1 . SF = \frac{1}{3}SF^2$

nên $$\frac{SH_1}{SH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SF^2}{SH^2}.$$

Mặt khác $HE = HF$, $SF_1 = \frac{1}{2}F_1F$

nên dễ thấy $$\frac{SH_1}{SH} = \frac{1}{2},$$

từ đó $$\frac{SH^2}{SF^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SH}{SF} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ta lại có $$\frac{SH}{SF} = \sin\widehat{SFH} = \frac{EF_1}{EF} = \frac{EF_1}{a}.$$

Vậy $EF_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$

Từ đó $S_{ABC_1D_1} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a^2\sqrt{6}}{9}.$

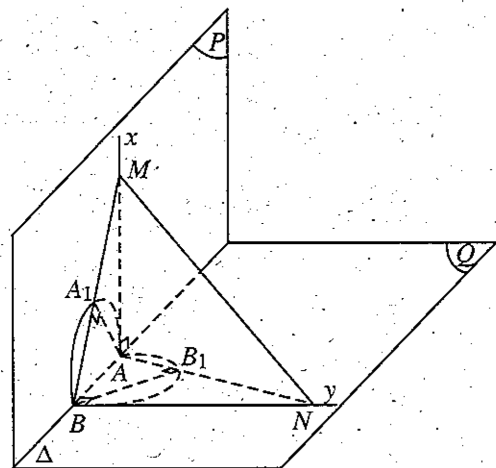
81. (h.218)

a) Vì $(P) \perp (Q)$, $(P) \cap (Q) = AB$, $M \in (P)$, $MA \perp AB$ nên $MA \perp (Q)$. Do đó MAB, MAN là các tam giác vuông tại A.

Tương tự như trên, các tam giác MBN, ABN vuông tại B.

b) Vì $MN^2 = MA^2 + AB^2 + BN^2$
$$= m^2 + 2a^2 + \frac{a^4}{m^2}.$$

Từ đó MN có độ dài bé nhất khi và chỉ khi $m^2 + \frac{a^4}{m^2}$ bé nhất.



Hình 218

Mặt khác $m^2.\frac{a^4}{m^2} = a^4$.

Vậy MN có độ dài bé nhất khi và chỉ khi

$$m^2 = \frac{a^4}{m^2} \Leftrightarrow m = a.$$

c) Vì $(MAB) \perp (NMB)$ nên khi kẻ AA_1 vuông góc với BM tại A_1 thì $AA_1 \perp (BMN)$, tức A_1 là chân đường cao của tứ diện $ABMN$ kẻ từ đỉnh A.

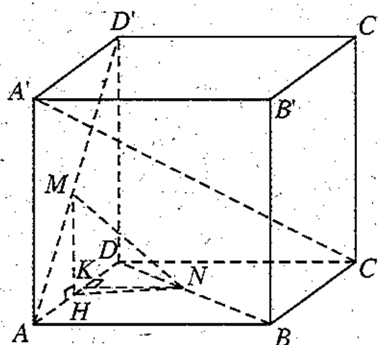
Như vậy A_1 thuộc (P) và $\widehat{BA_1A} = 90^\circ$, từ đó A_1 thuộc đường tròn đường kính AB trong (P). Đường tròn này cố định.

Tương tự như trên, chân đường cao B_1 kẻ từ đỉnh B của tứ diện $ABMN$ cũng thuộc đường tròn đường kính AB nằm trong mặt phẳng (Q).

82. (h.219)

a) Kẻ $MH \perp AD$ thì

$MH \perp (ABCD)$ và $MH = \frac{x\sqrt{2}}{2} = AH$.



Hình 219

Kẻ $NK \perp AD$ thì

$$NK = \frac{x\sqrt{2}}{2} = DK.$$

Vậy $KH = |a - x\sqrt{2}|$.

Ta có

$$MN^2 = MH^2 + HK^2 + KN^2 = 3x^2 - 2a\sqrt{2}x + a^2.$$

Từ đó MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

b) Khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì

$$MN^2 = \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{3};$$

$$AM^2 = \frac{2a^2}{9};$$

$$AN^2 = AD^2 + DN^2 - 2AD.DN\cos 45^\circ = \frac{5a^2}{9}.$$

Từ đó $\quad AN^2 = AM^2 + MN^2$ hay $MN \perp AD'$.

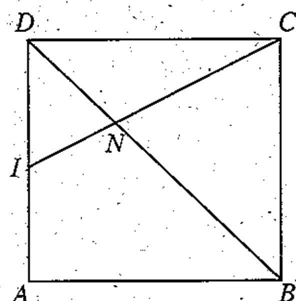
Chứng minh tương tự như trên, ta cũng có $MN \perp BD$.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AD' và BD.

Khi $DN = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì

$$NB = 2ND.$$

Gọi I là trung điểm của AD thì ta có I, N, C thẳng hàng (h.220). Tương tự ta cũng có các điểm I, M, A' thẳng hàng.



Hình 220

Xét tam giác $A'IC$ ta có

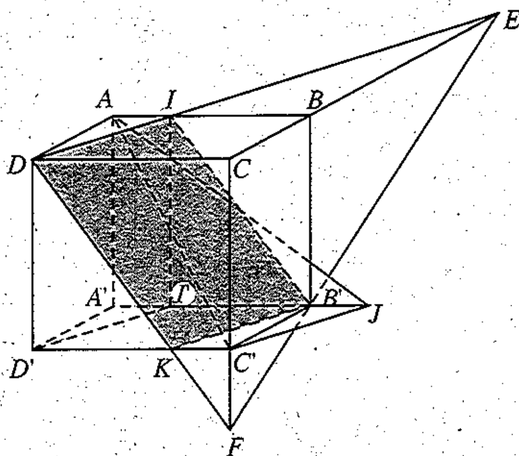
$$\frac{IN}{NC} = \frac{IM}{MA'} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\qquad MN \,//\, A'C$.

83. (h.221)

a) *Cách 1.*

Đặt α là góc giữa DI và AC' thì



Hình 221

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AC'}\right|}{\left|\overrightarrow{DI}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|}.$$

$$= \frac{(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'})}{\left|\overrightarrow{DI}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|}$$

$$= \frac{\left|-a^2 + xa\right|}{\sqrt{a^2 + x^2}.a\sqrt{3}} = \frac{\left|-a + x\right|}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Khi ấy $\alpha = 60^\circ$ khi và chỉ khi

$$\frac{\left|-a + x\right|}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \quad x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = a(4 - \sqrt{15}) \text{ (vì } 0 < x < a).$$

Hệ thức trên xác định vị trí điểm I.

Cách 2.

Kẻ $II' \,//\, AA'$ ($I' \in A'B'$), $C'J \,//\, D'I'$ (I' thuộc đường thẳng $A'B'$) thì $\widehat{AC'J}$ hoặc $180^\circ - \widehat{AC'J}$ là góc giữa hai đường thẳng AC' và DI với $B'J = x$.

Do giả thiết góc giữa hai đường thẳng AC' và DI bằng 60° nên $\widehat{AC'J} = 60^\circ$ hoặc 120°.

Ta có $\quad AJ^2 = AA'^2 + A'J^2 = a^2 + (a+x)^2$

$$AC'^2 = 3a^2,\ C'J^2 = a^2 + x^2.$$

– Trường hợp $\widehat{AC'J} = 60^\circ$, ta có

$$AJ^2 = AC'^2 + C'J^2 - 2AC'.C'J.\frac{1}{2}$$

hay $\quad a^2 + (a+x)^2 = 3a^2 + a^2 + x^2 - 2a\sqrt{3}.\sqrt{a^2+x^2}.\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = (4 - \sqrt{15})a \text{ (vì } 0 < x < a).$$

– Trường hợp $\widehat{AC'J} = 120^\circ$, ta có

$$a^2 + (a+x)^2 = 3a^2 + a^2 + x^2 + 2a\sqrt{3}.\sqrt{a^2+x^2}.\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ax = 2a^2 + a\sqrt{3}.\sqrt{a^2+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(x-a) = \sqrt{3}.\sqrt{a^2+x^2}.$$

Điều này không xảy ra vì $0 < x < a$.

Vậy khi $x = (4 - \sqrt{15})a$ thì góc giữa DI và AC' bằng 60°.

b) Gọi $\quad E = DI \cap CB$

$$F = B'E \cap CC'$$

$$K = DF \cap D'C'$$

thì thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mp($B'DI$) là tứ giác $DIB'K$. Dễ thấy đó là hình bình hành.

$$S_{DIB'K} = 2S_{B'ID} = 2.\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{IB'}^2.\overrightarrow{ID}^2 - (\overrightarrow{IB'}.\overrightarrow{ID})^2}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{ID}^2.\overrightarrow{IB'}^2 = (a^2 + x^2)[a^2 + (a - x)^2]$

và $(\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IB'})^2 = [(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BB'})]^2$

$$= (\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB})^2 = [-x(a - x)]^2 = x^2(a - x)^2.$$

Từ đó $S_{DIB'K} = \sqrt{a^4 + a^2x^2 + a^2(a - x)^2}$

$$= a\sqrt{a^2 + x^2 + (a - x)^2}.$$

Dễ thấy $S_{DIB'K}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \frac{a}{2}$.

c) Gọi h là khoảng cách từ C đến mp($B'ID$), do tứ diện $CDEF$ có CD, CE, CF đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CF^2}.$$

Mặt khác do AD // BE nên $\frac{a}{BE} = \frac{x}{a - x}$,

từ đó $BE = \frac{a(a - x)}{x}$

và $CE = a + \frac{a(a - x)}{x} = \frac{a^2}{x}.$

Tương tự như trên, ta có $C'F = \frac{ax}{a - x}$, từ đó

$$CF = a + \frac{ax}{a - x} = \frac{a^2}{a - x}.$$

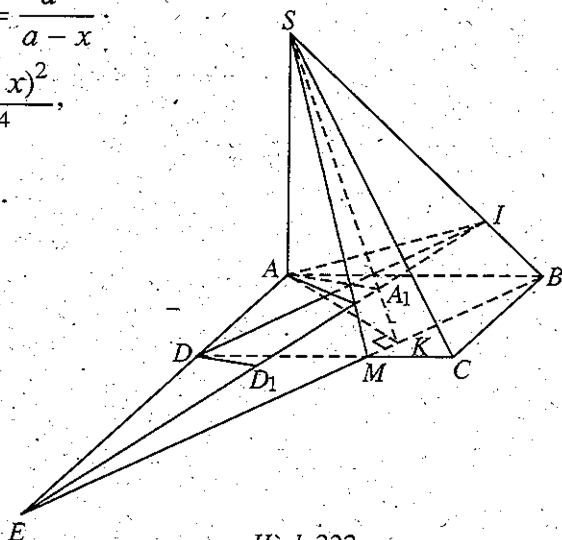
Như vậy $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{(a - x)^2}{a^4}$,

do vậy $h = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2 + (a - x)^2}}.$

84. (h.222)

a) Kẻ $AK \perp MB$, do $SA \perp (ABC)$ nên $SK \perp MB$ (định lí ba đường vuông góc).

Vậy $S_{SBM} = \frac{1}{2}BM.SK$.



Hình 222

Mặt khác $BM = \sqrt{b^2 + x^2}$ và $AK \,.\, MB = 2S_{AMB} = ab$

tức là $$AK = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + x^2}}.$$

Từ đó $$SK^2 = SA^2 + AK^2 = h^2 + \frac{a^2b^2}{b^2 + x^2}$$

$$= \frac{a^2b^2 + b^2h^2 + h^2x^2}{b^2 + x^2}.$$

Vậy $$S_{SBM} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2h^2 + h^2x^2}.$$

b) Với A_1 là hình chiếu của A trên SK, dễ thấy $AA_1 \perp (SBM)$.

Từ đó $AA_1 \,.\, SK = SA \,.\, AK,$

suy ra $$AA_1 = \frac{SA.AK}{SK}$$

hay $$AA_1 = \frac{h.\dfrac{ab}{\sqrt{b^2 + x^2}}}{\dfrac{\sqrt{a^2b^2 + b^2h^2 + h^2x^2}}{\sqrt{b^2 + x^2}}} = \frac{abh}{\sqrt{a^2b^2 + b^2h^2 + h^2x^2}}.$$

Khi M là trung điểm DC thì $x = \frac{a}{2}$ nên

$$AA_1 = \frac{2abh}{\sqrt{4a^2b^2 + 4b^2h^2 + a^2h^2}}.$$

c) Vì $AA_1 \perp (SMB)$ nên $AA_1 \perp SB$, mặt khác $AD \perp SB$, từ đó mp$(ADA_1) \perp SB$. Gọi giao điểm của SB với mp(ADA_1) là I thì $AI \perp SB$, từ đó I là điểm cố định và mp(ADA_1) cố định.

Như vậy, điểm A_1 nhìn AI cố định dưới gốc vuông và A_1 thuộc mặt phẳng cố định (ADI), tức là A_1 thuộc đường tròn đường kính AI trong mp(ADI). Bán kính của đường tròn đó bằng $\frac{AI}{2}$ mà

$$AI \,.\, SB = SA \,.\, AB$$

hay $$AI = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Vậy bán kính của đường tròn trên bằng $\frac{ah}{2\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Vì D_1 là hình chiếu của điểm D trên mp(SBM) nên $DD_1 \,//\, AA_1$ và dễ thấy D_1 thuộc đường thẳng A_1I.

Như vậy, D_1 thuộc mp(ADI) và D_1 nhìn DI dưới góc vuông, tức là điểm D_1 thuộc đường tròn đường kính DI trong mp(ADI). Bán kính của đường tròn đó bằng $\frac{DI}{2}$.

Mặt khác $$DI^2 = DA^2 + AI^2 = b^2 + \frac{a^2h^2}{a^2 + h^2}$$
$$= \frac{a^2b^2 + b^2h^2 + a^2h^2}{a^2 + h^2}.$$

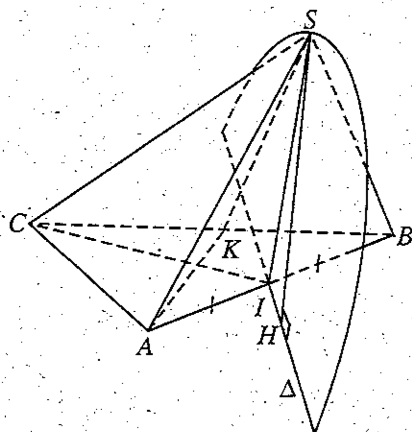
Từ đó, bán kính của đường tròn đó là
$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2h^2 + b^2h^2}{a^2 + h^2}}.$$

85. (h.223)

a) Vì $AB = a$, $SA = a$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$ nên SAB là tam giác đều, từ đó điểm S thuộc mặt phẳng trung trực (α) của AB và mặt phẳng (α) cố định, ngoài ra $(\alpha) \perp (ABC)$. Kí hiệu $\Delta = (\alpha) \cap (ABC)$ thì Δ cố định.

Do H là hình chiếu của S trên (ABC) nên H thuộc Δ.

Vậy hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) thuộc đường thẳng Δ cố định nói trên.



Hình 223

Gọi I là trung điểm của AB ta có $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, như vậy, điểm S thuộc đường tròn tâm I, bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ trong mặt phẳng (α) nói trên, tức là điểm S thuộc đường tròn cố định.

b) Ta có $SH \leq SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Như vậy giá trị lớn nhất của SH bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ khi H trùng với điểm I.

Do $SI \subset (SAB)$ và $I \equiv H$, $SH \perp (ABC)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$ khi SH đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó $\qquad SC^2 = CI^2 + SI^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + CI^2.$

Mặt khác $\qquad CI^2 = CA^2 + AI^2 - 2AC.AI.\cos 120^\circ$

$$= a^2 + \frac{a^2}{4} + 2a.\frac{a}{2}.\frac{1}{2} = \frac{7a^2}{4}.$$

Từ đó $\qquad SC^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{7a^2}{4} = \frac{10a^2}{4}$

hay $\qquad SC = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$

c) – Khi SBC là tam giác vuông tại điểm S thì hình chiếu của điểm A trên mp(SBC) là trung điểm K của BC.

Thật vậy, ta có $AS = AC = AB$ nên $KS = KC = KB$.

Do đó, AK là khoảng cách từ điểm A đến mp(SBC).

Dễ thấy $AK = AC\cos 60^\circ = \frac{a}{2}$.

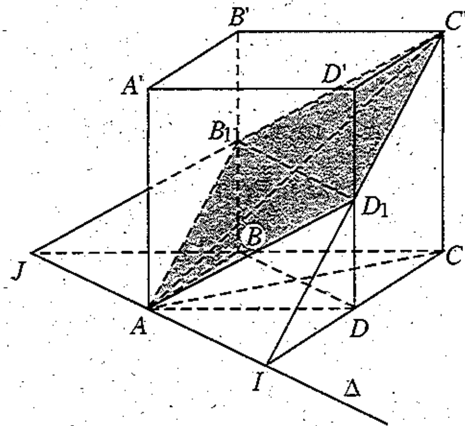
– Vì $BC = a\sqrt{3}$, $SB = a$ nên $SC = a\sqrt{2}$.

Mặt khác $SA = AC = a$ nên $SC^2 = AS^2 + AC^2$, tức là $\widehat{SAC} = 90^\circ$.

Như vậy, góc giữa hai đường thẳng SA và AC bằng 90°.

86. (h.224)

a) Gọi $I = CD \cap \Delta$, $J = BC \cap \Delta$, $B_1 = C'J \cap BB'$, $D_1 = C'I \cap DD'$ thì thiết diện thu được là $AB_1C'D_1$.



Hình 224

Dễ thấy $AB_1C'D_1$ là hình bình hành và B_1, D_1 lần lượt là trung điểm của BB', DD'.

Từ đó $AD_1 = D_1C'$.

Do đó thiết diện $AB_1C'D_1$ là hình thoi.

$$S_{AB_1C'D_1} = \frac{1}{2}B_1D_1.AC',$$

$$B_1D_1 = BD = a\sqrt{2},$$

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 2a^2 + 6a^2 = 8a^2 \Rightarrow AC' = 2a\sqrt{2}.$$

Vậy $S_{AB_1C'D_1} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.2a\sqrt{2} = 2a^2$.

b) Ta có $AC \perp BD$ mà $\Delta \parallel BD$ nên $AC \perp \Delta$.

Mặt khác $C'C \perp (ABCD)$ nên $AC' \perp \Delta$ (định lí ba đường vuông góc).

Vậy $\widehat{C'AC}$ là góc giữa mp(P) và mp($ABCD$).

Ta có $\tan\widehat{C'AC} = \frac{CC'}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, từ đó $\widehat{C'AC} = 60^\circ$.

Chú ý. Cũng có thể tính góc giữa mp(P) và mp($ABCD$) bởi công thức

$$S_{ABCD} = S_{AB_1C'D_1}\cos\varphi$$

mà $$S_{ABCD} = a^2,\ S_{AB_1C'D_1} = 2a^2,$$

tức là $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ hay $\varphi = 60^\circ$.

87. (h.225)

a) Vì $BC \parallel (SAD)$

$M \in mp(SAD) \cap mp(MBC)$

nên $mp(MBC) \cap (SAD) = MN$

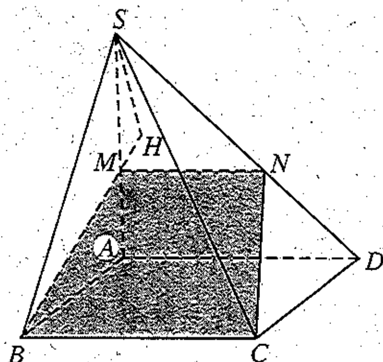
mà $MN \parallel BC$ ($N \in SD$).

Như vậy $BMNC$ là hình thang.

Mặt khác $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp BM$.

Vậy $BMNC$ là hình thang vuông.

Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp(MBC) nói chung là hình thang vuông.



Hình 225

Khi $x = 0$ thì thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$, và khi $x = 2a$ thì thiết diện là tam giác SBC.

Ta có $$S_{BMNC} = \frac{1}{2}(BC + MN).BM$$

$$BM^2 = a^2 + x^2 \text{ hay } BM = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2a - x}{2a}, \text{ từ đó } MN = b.\frac{2a - x}{2a}.$$

Từ đó $$S_{BMNC} = \frac{1}{2}\left(b + b.\frac{2a - x}{2a}\right).\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{b}{4a}(4a - x)\sqrt{a^2 + x^2}.$$

b) Do $(BMNC) \perp (SAB)$ nên khi kẻ SH vuông góc với đường thẳng BM ($H \in BM$) thì $SH \perp (BMNC)$.

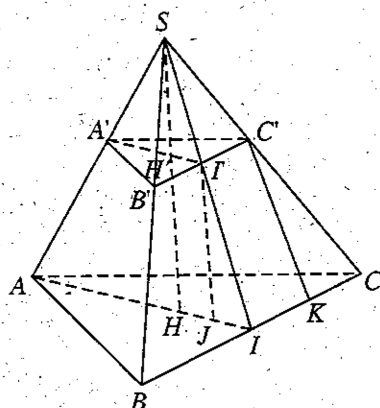
Khoảng cách từ S đến mp(BCM) là SH. Dễ thấy

$$SH.BM = 2S_{SBM} = 2.\frac{1}{2}a(2a - x).$$

Vậy $$SH = \frac{a(2a - x)}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

88. (h.226)

a) Gọi S là đỉnh của hình chóp đều sinh ra hình chóp cụt đều $A'B'C'.ABC$; các điểm H, H' lần lượt là tâm hai đáy của hình chóp cụt đều ; I là trung điểm của BC. Dễ thấy $\widehat{HSI} = \alpha$, từ đó $\widehat{SIH} = 90^\circ - \alpha = \beta$.



Hình 226

Ta có $HH' = I'J = JI.\tan\beta = JI.\cot\alpha$.

Mà $JI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} - \dfrac{b\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}(a-b)$.

Vậy $\quad HH' = \dfrac{\sqrt{3}}{6}(a-b)\cot\alpha,$

$$II' = \frac{JI}{\cos\beta} = \frac{JI}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}(a-b)}{6\sin\alpha}$$

$$CC'^2 = C'K^2 + KC^2 = \left(\frac{\sqrt{3}(a-b)}{6\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

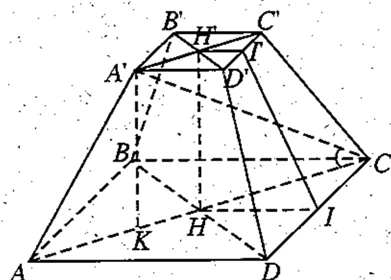
$$\Rightarrow CC' = \frac{a-b}{2\sqrt{3}\sin\alpha}\sqrt{1+3\sin^2\alpha}.$$

b) $$S_{xq} = 3.\frac{1}{2}(B'C' + BC).II' = \frac{3}{2}(a+b)\frac{\sqrt{3}(a-b)}{6\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{4\sin\alpha}(a^2-b^2)$$

$$S_{tp} = \frac{\sqrt{3}}{4\sin\alpha}(a^2-b^2) + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a^2-b^2}{\sin\alpha} + a^2 + b^2\right).$$

89. (h.227)

Gọi H, H' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$. I, I' lần lượt là trung điểm của CD, $C'D'$ thì $HH' = h$; $\widehat{A'CA} = \beta$; $\widehat{I'IH} = \alpha$.



Hình 227

a) Dễ thấy $II' = \dfrac{h}{\sin\alpha}$.

Kí hiệu độ dài cạnh của các đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$ lần lượt là x, y $(x > y)$.

Ta có $\dfrac{x-y}{2} = h\cot\alpha$

$\Leftrightarrow x - y = 2h\cot\alpha.$ (1)

Kẻ $A'K$ // HH' thì $A'K = HH' = h$ và

$KC = A'K\cot\beta = h\cot\beta$ hay $x\sqrt{2} - \dfrac{x\sqrt{2} - y\sqrt{2}}{2} = h\cot\beta.$

Từ đó $\dfrac{(x+y)\sqrt{2}}{2} = h\cot\beta$

$\Leftrightarrow x + y = \sqrt{2}h\cot\beta$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $x = \dfrac{h}{2}(\sqrt{2}\cot\beta + 2\cot\alpha)$

$y = \dfrac{h}{2}(\sqrt{2}\cot\beta - 2\cot\alpha)$ (điều kiện $\sqrt{2}\cot\beta - 2\cot\alpha > 0$).

b) $S_{xq} = 4.\dfrac{1}{2}(x+y)II' = 2\sqrt{2}h\cot\beta.\dfrac{h}{\sin\alpha}$

$= \dfrac{2\sqrt{2}h^2\cot\beta}{\sin\alpha}.$

Bài tập trắc nghiệm chương III

1. (D).	**2.** (C).	**3.** (B).	**4.** (B).	**5.** (D).
6. (A).	**7.** (A).	**8.** (A).	**9.** (B).	**10.** (B).
11. (B).	**12.** (D).	**13.** (C).	**14.** (A).	**15.** (D).
16. (A).	**17.** (A).	**18.** (D).		

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. ĐỀ BÀI

1. Cho đường thẳng a và vectơ $\vec{u}$ có giá vuông góc với a. Gọi F là phép hợp thành của đối xứng trục $Đ_a$ và tịnh tiến $T_{\vec{u}}$. Với điểm M bất kì, gọi $M' = F(M)$ và I là trung điểm của MM'.

a) Tìm quỹ tích của I khi M thay đổi.

b) Chứng minh rằng F là phép đối xứng trục.

2. Cho điểm O nằm trên đường thẳng a. Gọi $Đ$ là phép đối xứng qua đường thẳng a, Q là phép quay tâm O góc quay φ và F là phép hợp thành của $Đ$ và Q. Với điểm M bất kì, gọi $M' = F(M)$ và I là trung điểm của MM'.

a) Tìm quỹ tích của I khi M thay đổi.

b) Chứng minh rằng F là phép đối xứng trục.

3. Cho đường tròn $(O\,;R)$ và một điểm A cố định, một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tìm quỹ tích các điểm N sao cho $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}$.

4. Cho đường tròn $(O\,;R)$ và hai điểm A, B cố định. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Gọi N là điểm đối xứng với M qua A, điểm M' đối xứng với N qua B. Tìm quỹ tích các điểm M'.

5. Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau và không vuông góc với nhau, điểm O không nằm trên chúng. Hãy xác định điểm A nằm trên a và điểm B nằm trên b sao cho tam giác OAB vuông cân tại đỉnh O.

6. Cho ba điểm A, B, C. Gọi $Đ_A$, $Đ_B$, $Đ_C$ là các phép đối xứng tâm có tâm lần lượt là A, B và C. Chứng minh rằng hợp thành của ba phép đối xứng tâm nói trên là một phép đối xứng tâm.

7. Cho năm điểm M, N, P, Q, R. Hãy xác định ngũ giác $ABCDE$ sao cho M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EA của ngũ giác đó.

8. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và hai điểm A, B cố định sao cho đường thẳng AB không cắt đường tròn. Một điểm M thay đổi trên đường tròn.

a) Tìm quỹ tích điểm N sao cho $ABMN$ là hình bình hành.

b) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABM.

9. Cho đường thẳng a và điểm G không nằm trên a. Với hai điểm phân biệt A, B thay đổi trên a, ta lấy điểm C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm C.

10. Cho phép vị tự V có tâm O tỉ số k và phép vị tự V' có tâm O' tỉ số k', biết rằng O, O' là hai điểm phân biệt và $kk' = 1$. Chứng minh rằng hợp thành của V và V' là một phép tịnh tiến.

11. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm K, N lần lượt là trung điểm của SA và CB. Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $\dfrac{SM}{MC} = \dfrac{2}{3}$.

a) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ASC và AKM.

b) Mặt phẳng qua K và song song với hai đường thẳng AB và SC có qua điểm N hay không ?

c) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(KMN).

d) Chứng minh rằng đường thẳng KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

12. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với M là trung điểm của CD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MAA_1) và (BDD_1B_1).

b) Dựng đường thẳng Δ qua M cắt cả BD_1 và AA_1.

c) Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của Δ với BD_1 và AA_1. Tính tỉ số $\dfrac{MP}{MQ}$.

d) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(B, Δ).

13. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua các đỉnh A, B, C, D dựng các đường thẳng a, b, c, d tương ứng song song với nhau và không thuộc mp$(ABCD)$. Trên mỗi đường thẳng a, b, c, d lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng :

a) Nếu các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 không đồng phẳng thì đường thẳng nối trung điểm của A_1C_1 và trung điểm của B_1D_1 luôn đi qua một điểm cố định.

b) Bốn điểm A_1, B_1, C_1, D_1 đồng phẳng khi và chỉ khi trung điểm của A_1C_1 trùng với trung điểm của B_1D_1.

c) Nếu bốn đường thẳng AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 đôi một cắt nhau thì $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là một hình hộp.

14. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong một mặt phẳng. M là một điểm của cạnh AD, N là một điểm chuyển động trên cạnh BE sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BE}$.

a) Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp trung điểm G của đoạn thẳng MN.

15. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 2a$, $CD = a$, $AD = 3a$; M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng AD.

a) Xác định vị trí điểm M để hai đường thẳng BM và CM vuông góc với nhau.

b) Gọi S là điểm thuộc đường thẳng vuông góc với mp(ABC) kẻ từ điểm M sao cho $SM = AM$. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là hình gì ? Tính diện tích thiết diện thu được theo a và x, ở đây $x = AM$ $(0 < x \leq 3a)$.

16. Cho hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau và vuông góc với nhau. (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ' và vuông góc với Δ, gọi I là giao điểm của (P) và Δ. Lấy điểm A cố định thuộc Δ $(A \neq I)$. Hai điểm B, C thay đổi trên Δ' sao cho mp(B, Δ) vuông góc với mp(C, Δ). Gọi AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $AB^2 + AC^2 - BC^2$ không đổi.

b) $A'B.A'C$ không đổi và trực tâm của tam giác ABC là điểm cố định.

c) Các điểm B', C' thuộc một đường tròn cố định.

17. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$. Xét hai tia At, Ct' cùng chiều và cùng vuông góc với mp(ABC). Lấy điểm M thuộc At, N thuộc Ct' $(M \neq A, N \neq C)$. Đặt $AM = m$, $CN = n$.

a) Tính góc giữa các mặt phẳng (MBD) và (NBD) với mặt phẳng ($ABCD$).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (NBD). Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, m, n để hai mặt phẳng đó vuông góc.

c) Khi $a = b$ và mp(MBD) vuông góc với mp(NBD), hãy tính đường cao OI của tam giác MON (trong đó O là giao điểm của AC và BD), từ đó suy ra hai mặt phẳng (BMN) và (DMN) vuông góc với nhau.

18. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn tâm O, bán kính R. Điểm A cố định thuộc đường tròn, đường kính BC quay quanh O, (BC không trùng với OA). Đặt $\widehat{ABC} = \alpha$. Điểm S nằm trong không gian sao cho SA vuông góc với (P) và $SA = 2R$.

a) Chứng minh rằng chân đường cao SH của tam giác SBC thuộc một đường tròn cố định.

b) Xác định α để diện tích tam giác SBC đạt giá trị lớn nhất, hãy tính giá trị đó.

19. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a. Lấy điểm B_1 thuộc BB', điểm C_1 thuộc CC'. Đặt $BB_1 = x$, $CC_1 = y$.

a) Tam giác AB_1C_1 có thể vuông ở A được không ? Tìm hệ thức liên hệ giữa a, x, y để AB_1C_1 là tam giác vuông tại B_1.

b) Giả sử AB_1C_1 là tam giác thường và B_1 là trung điểm của BB', $y = 2x$ và α là góc giữa mp(ABC) và mp(AB_1C_1). Hãy tính diện tích tam giác AB_1C_1 và độ dài cạnh bên của hình lăng trụ đã cho.

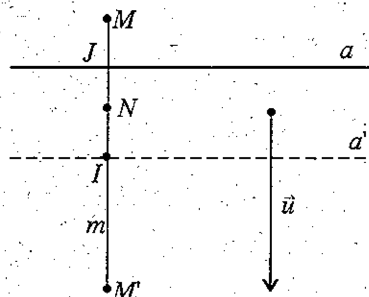
B. ĐÁP ÁN

1. (h.228)

a) Nếu $Đ_a$ biến điểm M thành điểm N thì $T_{\vec{u}}$ biến điểm N thành điểm M' tức là $\overrightarrow{NM'} = \vec{u}$. Vì vectơ $\vec{u}$ có giá vuông góc với a nên ba điểm M, N và M' cùng nằm trên đường thẳng m vuông góc với a. Gọi J là trung điểm của MN thì J nằm trên a và ta có :

$$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{MN}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{NM'} = \frac{\vec{u}}{2}.$$



Hình 228

Như vậy I là ảnh của J qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{u}}{2}$, suy ra quỹ tích I là đường thẳng a' ảnh của a qua phép tịnh tiến đó.

b) Từ câu a), ta suy ra a' là trung trực của đoạn thẳng MM'. Suy ra F là phép đối xứng trục với trục là đường thẳng a'.

2. (h.229)

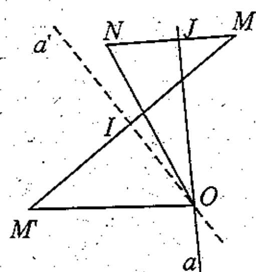
a) Nếu $Đ$ biến điểm M thành điểm N thì Q biến điểm N thành điểm M'. Gọi J là trung điểm MN thì J nằm trên a và OJ là phân giác của góc MON.

Ta có

$$(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OI}) - (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OJ})$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) - (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM'}) = \frac{\varphi}{2}.$$



Hình 229

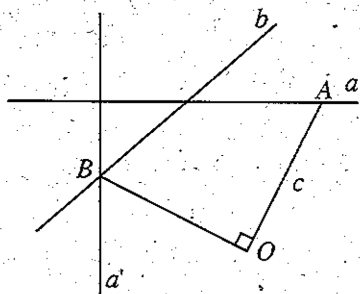
Như vậy nếu gọi Q' là phép quay tâm O góc quay $\frac{\varphi}{2}$ thì Q biến đường thẳng OJ (tức là đường thẳng a) thành đường thẳng OI. Vậy quỹ tích của I là đường thẳng a', ảnh của a qua phép quay Q'.

b) Từ câu a) ta suy ra a' là trung trực của đoạn thẳng MM'. Suy ra F là phép đối xứng trục với trục là đường thẳng a'.

3. Từ $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}$ suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}$. Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OA}$ thì T biến M thành N. Vậy quỹ tích các điểm N là ảnh của đường tròn $(O\,;R)$ qua phép tịnh tiến T, đó là đường tròn tâm A bán kính R.

4. *Hướng dẫn.* Chứng minh $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$. Quỹ tích các điểm M' là đường tròn ảnh của đường tròn $(O\,;R)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

5. (h.230) Giả sử đã xác định được hai điểm A, B theo yêu cầu của bài toán.



Hình 230

Vì $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên góc lượng giác $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Xét trường hợp $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$.

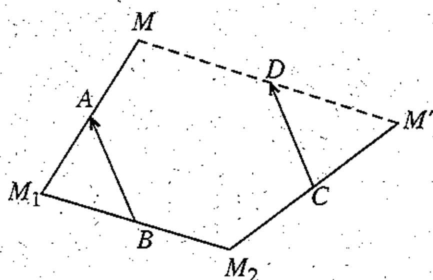
Gọi Q là phép quay tâm O với góc quay $\frac{\pi}{2}$ và a' là ảnh của đường thẳng a qua phép Q. Vì Q biến điểm A thành điểm B nên B cũng nằm trên đường thẳng a', nói cách khác B là giao điểm của a' và b.

Vậy ta có cách xác định điểm B như sau : Xác định đường thẳng a' là ảnh của đường thẳng a qua phép quay Q rồi lấy giao điểm B của a' và b. (Chú ý rằng a' vuông góc với a còn b không vuông góc với a nên a' và b cắt nhau). Để xác định điểm A ta vẽ đường thẳng c đi qua O và vuông góc với OB thì c sẽ cắt a tại A. Vậy OAB là tam giác vuông cân cần tìm.

Đối với trường hợp $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$ ta cũng làm tương tự và được tam giác vuông cân $OA'B'$ với A' nằm trên a và B' nằm trên b.

Bài toán có hai nghiệm hình.

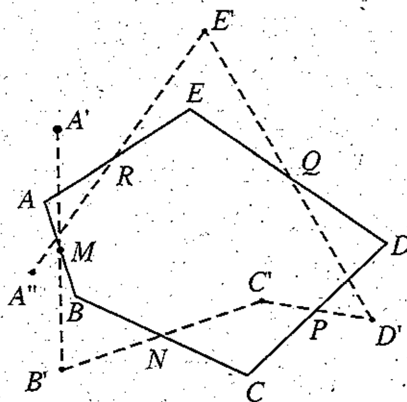
6. (h.231) Gọi F là phép hợp thành của ba phép đối xứng $Đ_A$, $Đ_B$ và $Đ_C$. Gọi M là điểm bất kì sao cho $M_1 = Đ_A(M)$, $M_2 = Đ_B(M_1)$, $M' = Đ_C(M_2)$, có nghĩa là các điểm A, B, C lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng MM_1, M_1M_2, M_2M'.



Hình 231

Từ đó nếu ta gọi D là trung điểm của đoạn thẳng MM' thì $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, tức D là điểm xác định không phụ thuộc vào M. Theo định nghĩa của phép hợp thành F thì F biến điểm M thành điểm M'. Vì D là trung điểm của MM' nên F là phép đối xứng tâm với tâm là D.

7. (h.232) Giả sử đã xác định được ngũ giác $ABCDE$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Lấy một điểm A' bất kì, và xác định các điểm B', C', D', E', A'' như sau : B' là điểm đối xứng của A' qua M, C' là điểm đối xứng của B' qua N, D' là điểm đối xứng của C' qua P, E' là điểm đối xứng của D' qua Q, và A'' là điểm đối xứng của E' qua R.



Hình 232

Theo các tính chất của phép đối xứng tâm ta có:

$\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$

$= -\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{EE'} = -\overrightarrow{AA''}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA''}$, do đó A là trung điểm của đoạn thẳng $A'A''$.

Từ đó suy ra cách dựng: Lấy điểm A' tuỳ ý rồi dựng các điểm B', C', D', E', A'' như trên. Dựng A là trung điểm của đoạn thẳng $A'A''$. Có điểm A ta dễ dàng dựng được các điểm B, C, D và E.

8. a) Vì tứ giác $ABMN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$. Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$ biến điểm M thành điểm N. Suy ra quỹ tích các điểm N là ảnh của đường tròn $(O\ ;R)$ qua phép tịnh tiến đó.

b) Gọi I là trung điểm AB thì $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$. Vậy phép vị tự $V_{\left(I,\frac{1}{3}\right)}$ biến điểm M thành điểm G. Từ đó suy ra quỹ tích các điểm G là đường tròn ảnh của đường tròn $(O\ ;R)$ qua phép vị tự nói trên.

9. *Hướng dẫn.* Gọi M là trung điểm AB thì phép vị tự V tâm G tỉ số -2 biến M thành C. Vì M di chuyển trên a nên quỹ tích của C là ảnh của a qua phép vị tự V.

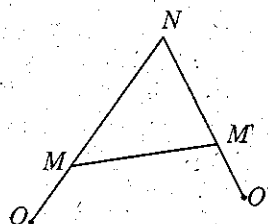
10. (h.233) Lấy điểm M tuỳ ý và giả sử V biến điểm M thành điểm N và V' biến điểm N thành điểm M'.

Khi đó ta có :

$\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'N}$.

Suy ra (với chú ý rằng $kk' = 1$)

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'O'}$$
$$= \frac{1}{k}\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{MM'} - k'\overrightarrow{O'N}$$
$$= \overrightarrow{MM'} + \frac{1}{k}(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NO'}) = \overrightarrow{MM'} + \frac{1}{k}\overrightarrow{OO'}.$$



Hình 233

Như vậy, ta có $\overrightarrow{MM'} = (1 - k')\overrightarrow{OO'}$. (*)

Vì phép hợp thành của V và V' biến M thành M' nên từ (*) ta suy ra phép hợp thành đó là phép tịnh tiến theo vectơ $(1 - k')\overrightarrow{OO'}$.

11. (h.234)

a) Từ C và M ta lần lượt kẻ các đường CH, MH' cùng vuông góc với SA (H, H' cùng thuộc SA).

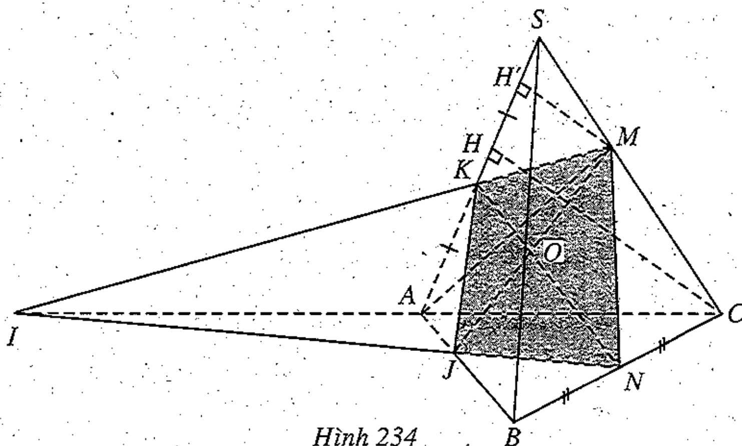
$$\text{Ta có } \frac{S_{ASC}}{S_{AKM}} = \frac{\frac{1}{2}SA.CH}{\frac{1}{2}AK.MH'} = 2.\frac{CH}{MH'} = 2.\frac{SC}{SM} = 2.\frac{5}{2} = 5.$$

b) Gọi :

(P) là mặt phẳng qua K, song song với AB và SC ;

(Q) là mặt phẳng qua AB và song song với SC ;

(R) là mặt phẳng qua SC và song song với AB.



Hình 234

Khi đó ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một song song.

Gọi $N' = BC \cap (P)$. Theo định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{CN'}{N'B} = \frac{SK}{KA} = 1 \Rightarrow CN' = N'B$$

do đó N' là trung điểm của BC, tức $N' \equiv N$.

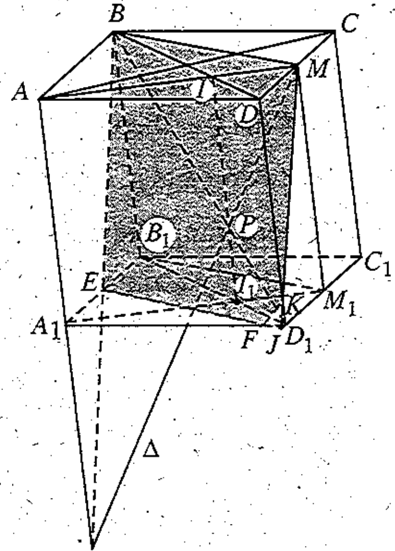
Vậy mp(P) qua điểm N.

c) Kéo dài MK cắt AC tại I ; nối IN cắt BA tại J. Vậy tứ giác $MNJK$ là thiết diện cần tìm.

d) Gọi O là giao điểm của KN và MJ thì O là giao điểm của mp(P) với JM. Ba mặt phẳng song song (R), (P), (Q) lần lượt cắt SA và MJ tại các điểm S, K, A và M, O, J. Theo định lí Ta-lét, ta có O là trung điểm của MJ (do K là trung điểm của SA). Từ đó, dễ thấy

$$S_{KOM} = S_{KOJ} ; S_{NMO} = S_{NOJ}.$$

Vậy $S_{MKN} = S_{JKN}$ tức là đường thẳng KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.



Hình 235

12. (h.235).

a) Gọi I là giao điểm của AM và BD, M_1 là trung điểm của C_1D_1, I_1 là giao điểm của A_1M_1 với B_1D_1. Dễ thấy II_1 chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (MAA_1) và (BDD_1B_1).

b) Giả sử đường thẳng Δ cần tìm cắt BD_1 và AA_1 lần lượt tại P và Q. Khi đó P chính là giao điểm của BD_1 với mp(MAA_1). Vậy P là giao điểm của BD_1 và II_1. Từ đó, suy ra cách dựng đường thẳng Δ như sau :

– Lấy giao điểm P của BD_1 và II_1.

– Vẽ đường thẳng MP.

Khi đó, đường thẳng MP chính là đường thẳng Δ cần tìm.

c) Ta có $DM \parallel AB \Rightarrow \dfrac{IM}{IA} = \dfrac{MD}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{IM}{IA} = \dfrac{1}{2}$

và $IP \parallel AQ \Rightarrow \dfrac{MP}{PQ} = \dfrac{MI}{IA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{MP}{PQ} = \dfrac{1}{2}$.

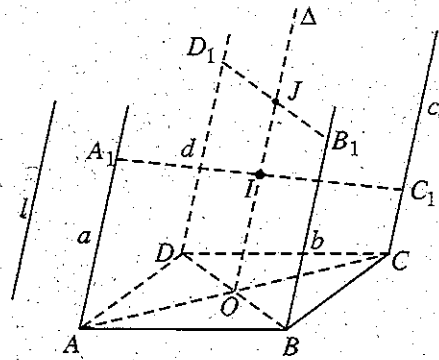
Suy ra $\dfrac{MP}{MP + PQ} = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{1}{3}$.

d) Nối B với Q cắt A_1B_1 tại E. Từ E kẻ $EF \parallel B_1M_1$ cắt A_1D_1 tại F. Gọi J là giao điểm của EF với C_1D_1. Nối J với M cắt DD_1 tại K.

Vậy thiết diện là ngũ giác $BEFKM$.

13. a) (h.236)

Xét phép chiếu song song lên mp($ABCD$) theo phương chiếu $l \parallel a$. Khi đó A_1C_1 có hình chiếu là AC nên trung điểm I của A_1C_1 có hình chiếu là trung điểm O của AC. Tương tự, trung điểm J của B_1D_1 có hình chiếu là trung điểm O của BD. Do đó, ba điểm I, J, O phải nằm trên một đường thẳng Δ. Đường thẳng Δ này đi qua điểm cố định O.



Hình 236

b) • Nếu A_1, B_1, C_1, D_1 đồng phẳng thì $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ vì chúng là giao tuyến của mp($A_1B_1C_1D_1$) với hai mặt phẳng song song (ABB_1A_1), (DCC_1D_1).

Tương tự, ta có $A_1D_1 \parallel B_1C_1$. Vậy tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là một hình bình hành. Do đó trung điểm I của A_1C_1 trùng với trung điểm J của B_1D_1.

• Ngược lại, nếu I trùng với J thì các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng nằm trên mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau A_1C_1 và B_1D_1.

c) (h.237)

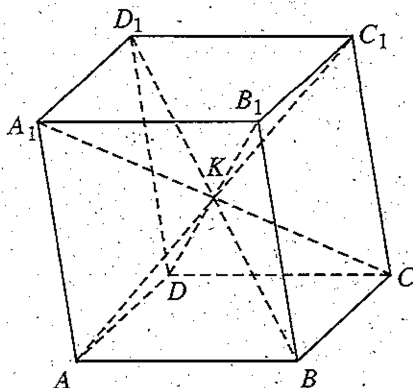
Giả sử AC_1 cắt BD_1 tại K. Khi đó, ta có

$mp(AC_1, BD_1) \equiv mp(ABC_1D_1)$.

Mặt phẳng này cắt hai mặt phẳng song song (ABB_1A_1), (DCC_1D_1) theo hai giao tuyến song song AB và C_1D_1, suy ra $C_1D_1 \,//\, CD$. Mặt khác $DD_1 \,//\, CC_1$.

Vậy tứ giác CDD_1C_1 là hình bình hành. Do đó

$$CD = C_1D_1 \Rightarrow C_1D_1 = BA.$$



Hình 237

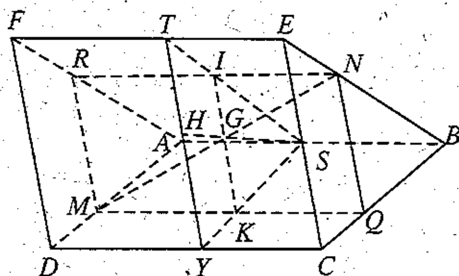
Như vậy ABC_1D_1 là hình bình hành và K là trung điểm của AC_1 và BD_1.

Tương tự, nếu BD_1 cắt CA_1 tại K' thì BCD_1A_1 là hình bình hành và K' là trung điểm của BD_1 và CA_1 nên $K' \equiv K$.

Tương tự, ta cũng suy ra K là trung điểm của B_1D, các mặt ABB_1A_1, BCC_1B_1 đều là hình bình hành và từ đó $A_1B_1C_1D_1$ cũng là hình bình hành. Vậy $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp.

14. (h.238)

a) Kẻ $MQ \,//\, AB$ ($Q \in BC$), kẻ $NR \,//\, AB$ ($R \in AF$). Dễ thấy tứ giác $MQNR$ là hình bình hành có các cạnh lần lượt song song với AB và EC. Từ đó suy ra MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(CDFE)$.



Hình 238

b) Gọi S, T, Y lần lượt là trung điểm của AB, EF, CD ; I, K lần lượt là trung điểm của NR và QM. Khi đó, dễ thấy G là trung điểm của IK và I, K lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng NR và ST, MQ và SY.

Gọi H là trung điểm của TY, thì rõ ràng S, G, H thẳng hàng và SH là đường trung tuyến của tam giác cố định STY. Vậy tập hợp các điểm G là đường trung tuyến SH của tam giác STY.

Hướng dẫn phần đảo. Lấy một điểm G bất kì trên đoạn thẳng SH, qua G kẻ đường thẳng $IK \parallel TY$ ($I \in ST$, $K \in SY$). Qua I và K lần lượt kẻ các đường thẳng NR và MQ cùng song song với AB ($N \in EB, R \in AF, M \in AD, Q \in BC$).

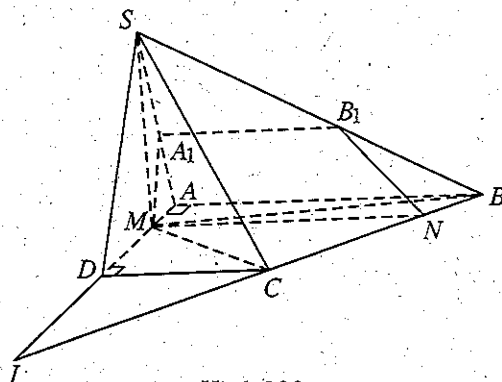
Sau đó chứng minh G là trung điểm của MN và $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{BN}{BE}$.

15. (h.239)

a) Đặt $AM = x$ thì $DM = 3a - x$. Dễ thấy $BC = a\sqrt{10}$.

$MB^2 = 4a^2 + x^2$

$MC^2 = a^2 + (3a - x)^2$.



Hình 239

Hai đường thẳng BM và CM vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$BC^2 = MB^2 + MC^2$

$\Leftrightarrow 10a^2 = 2x^2 + 14a^2 - 6ax$

$\Leftrightarrow x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$

$\Rightarrow x = a, x = 2a.$

Vậy có hai vị trí của điểm M để MB và MC vuông góc với nhau.

b) Vì $SM \perp (ABCD)$, $AB \perp MA$ nên $AB \perp SA$ (định lí ba đường vuông góc). Mặt khác $(P) \perp SA$ nên $(P) \parallel AB$.

Do $MA = MS$, (P) đi qua M và $(P) \perp SA$ nên (P) cắt SA tại trung điểm A_1 của SA. Từ đó (P) cắt (SAB) theo giao tuyến A_1B_1 với $A_1B_1 \parallel AB$; (P) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến MN song song với AB. Như vậy, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp(P) là hình thang vuông MA_1B_1N (tứ giác MA_1B_1N là hình thang vuông vì $MN \parallel A_1B_1$, ngoài ra $AB \perp (SAD)$ nên $A_1B_1 \perp (SAD)$, tức là $A_1B_1 \perp MA_1$).

$$S_{MA_1B_1N} = \frac{1}{2}(A_1B_1 + MN).A_1M$$

$$A_1B_1 = \frac{1}{2}AB = a,\ A_1M = \frac{1}{2}SA = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi I là giao điểm của AD và BC thì $IA = 6a$. Ta có

$$\frac{MN}{AB} = \frac{IM}{IA} \Leftrightarrow \frac{MN}{2a} = \frac{6a - x}{6a}$$

$$\Rightarrow \quad MN = \frac{6a - x}{3}.$$

Vậy $S_{MA_1B_1N} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{6a - x}{3}\right) \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}(9a - x)x}{12} \text{ (với } 0 < x \leq 3a).$$

16. (h.240)

Ta có $AI \perp (IBC)$ nên $\widehat{BIC}$ hoặc $180^o - \widehat{BIC}$ là góc giữa mp(B, Δ) và mp(C, Δ). Theo giả thiết mp(B, Δ) $\perp$ mp(C, Δ) nên $\widehat{BIC} = 90^o$. Như vậy tứ diện $IABC$ có IA, IB, IC đôi một vuông góc.

a) Ta có

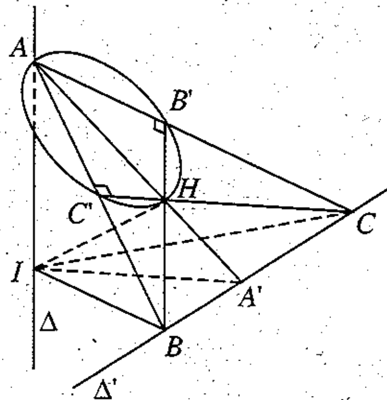
$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = AI^2 + IB^2 + AI^2 + IC^2 - BC^2 = 2AI^2.$$

Điều này khẳng định $AB^2 + AC^2 - BC^2$ không đổi.

b) Dễ thấy IA' là đường cao của tam giác vuông IBC. Vậy

$A'B.A'C = IA'^2$. Vì $IA' \perp \Delta'$ nên IA' là cố định, do đó $A'B.A'C$ không đổi.

Vì $IABC$ là tứ diện có các cạnh IA, IB, IC đôi một vuông góc nên trực tâm của tam giác ABC là hình chiếu H của điểm I trên mặt phẳng (ABC) (trùng với mặt phẳng (A, Δ')). Vậy trực tâm H của tam giác ABC là điểm cố định.



Hình 240

c) Ta có B', C' thuộc mp(A, Δ').

$$\widehat{AB'H} = \widehat{AC'H} = 90^{\circ}.$$

Vậy B', C' thuộc đường tròn đường kính AH trong mp(A, Δ'). Đường tròn này cố định.

17. (h.241)

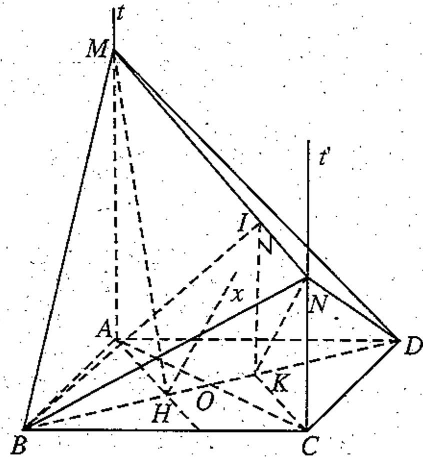
a) Kẻ $AH \perp BD$. Do $MA \perp (ABCD)$ nên $MH \perp BD$ (định lí ba đường vuông góc).

Ta có MAH là tam giác vuông tại A nên $\widehat{MHA}$ là góc giữa mp(MBD) với mp($ABCD$). Đặt $\widehat{MHA} = \alpha$ thì

$$\tan\alpha = \frac{MA}{AH}, MA = m,$$

$$AH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{m\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$



Hình 241

Vậy góc giữa mặt phẳng (MBD) và mặt phẳng ($ABCD$) là α mà

$$\tan\alpha = \frac{m\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

Tương tự, ta có $\widehat{NKC}$ là góc giữa mp(NBD) với mp($ABCD$) và đặt $\widehat{NKC} = \beta$ thì

$$\tan\beta = \frac{n\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng (NBD) và mặt phẳng ($ABCD$) là β mà

$$\tan\beta = \frac{n\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

b) Kẻ Hx song song với KN, do AH // KC và At, Ct' nằm về một phía của ($ABCD$) nên $\widehat{MHx}$ hoặc $180^{\circ} - \widehat{MHx}$ là góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (NBD).

Đặt $\widehat{MHx} = \gamma$ thì $\gamma = 180^{\circ} - (\alpha + \beta)$

$$\tan\gamma = -\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}(m+n)ab}{mn(a^2 + b^2) - a^2b^2}.$$

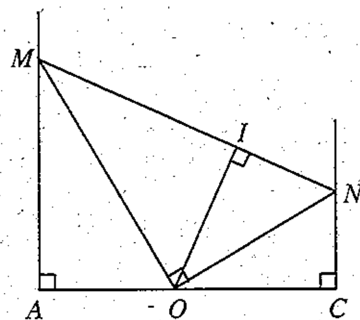
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (NBD) là φ mà

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}(m+n)ab}{\left|mn(a^2 + b^2) - a^2b^2\right|}.$$

Từ đó, suy ra mặt phẳng (MBD) và mặt phẳng (NBD) vuông góc khi và chỉ khi $mn(a^2 + b^2) - a^2b^2 = 0$ hay $mn = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

c) Khi $a = b$ thì $H \equiv K \equiv O$ và mp$(MBD) \perp$ mp(NBD) tức là $mn = \dfrac{a^2}{2}$.

Gọi OI là đường cao của tam giác vuông OMN (h.242).



Hình 242

Ta có $OI = \dfrac{2S_{MON}}{MN}$

$$2S_{MON} = 2\left[S_{ACNM} - \left(S_{AMO} + S_{CNO}\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}(m+n)a\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot m - \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}n\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}(m+n).$$

$$MN = \sqrt{(m-n)^2 + 2a^2} = \sqrt{(m-n)^2 + 4mn} = m + n.$$

Từ đó $OI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

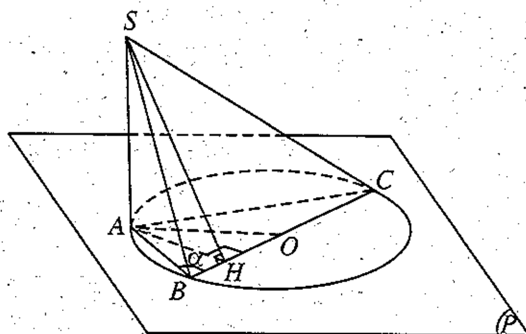
Vậy BID là tam giác vuông tại I.

Mặt khác $BD \perp (MACN)$ nên $BD \perp MN$; kết hợp với $OI \perp MN$ ta có $MN \perp (BID)$.

Vì $\widehat{BID} = 90^{\circ}$ nên hai mặt phẳng (BMN) và (DMN) vuông góc với nhau.

18. (h.243)

a) Vì $SA \perp (P)$ và $SH \perp BC$ nên $AH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc) hay $\widehat{AHO} = 90^\circ$. Như vậy H thuộc đường tròn đường kính AO trong mp(P). Đường tròn này cố định.



Hình 243

b) $S_{SBC} = \frac{1}{2}BC.SH = R.SH.$

Do đó S_{SBC} lớn nhất khi và chỉ khi SH lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi AH lớn nhất, tức là H và O trùng nhau, khi đó $\alpha = 45^\circ$.

Khi $\alpha = 45^\circ$ thì $S_{SBC} = R.\sqrt{4R^2 + R^2} = R^2\sqrt{5}$.

19. (h.244)

a) • Tam giác AB_1C_1 vuông ở A khi và chỉ khi

$$B_1C_1^2 = AB_1^2 + AC_1^2.$$

Mặt khác

$$B_1C_1^2 = a^2 + (x-y)^2$$

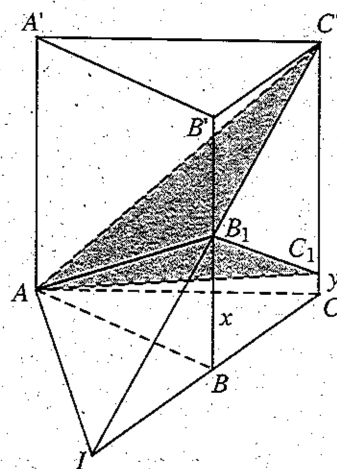
$$AB_1^2 = a^2 + x^2$$

$$AC_1^2 = a^2 + y^2.$$

Do đó tam giác AB_1C_1 vuông ở A khi và chỉ khi

$$a^2 + (x-y)^2 = 2a^2 + x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2xy = -a^2.$$



Hình 244

Điều này không xảy ra. Vậy tam giác AB_1C_1 không thể vuông tại A được.

• Tam giác AB_1C_1 vuông tại B_1 khi và chỉ khi

$$AC_1^2 = AB_1^2 + B_1C_1^2 \Leftrightarrow a^2 + y^2 = a^2 + x^2 + a^2 + (x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2xy = 2x^2 + a^2.$$

Đó là hệ thức liên hệ giữa a, x, y để tam giác AB_1C_1 vuông tại B_1.

b) Khi B_1 là trung điểm của BB', $y = 2x$ thì C_1 trùng với C'.

Gọi $I = BC \cap B_1C'$ thì $AI = (AB_1C') \cap (ABC)$.

Vì $B_1B = \frac{1}{2}BB'$ nên $BI = BC$, từ đó ta có IAC là tam giác vuông tại A, tức là $AC \perp AI$.

Mặt khác, $C'C \perp (ABC)$ nên $AC' \perp AI$ (định lí ba đường vuông góc).

Như vậy $\widehat{C'AC}$ là góc giữa mp(AB_1C') và mp(ABC).

Theo giả thiết thì $\widehat{C'AC} = \alpha$.

Từ đó $S_{ABC} = S_{AB_1C_1}\cos\alpha$

tức là $S_{AB_1C_1} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\alpha}$.

Như vậy $S_{AB_1C_1} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

Ta cũng có $CC' = AC\tan\alpha = a\tan\alpha$.

Vậy độ dài cạnh bên của hình lăng trụ đã cho là $a\tan\alpha$.

MỤC LỤC